Dynamische Systeme

June 16, 2017

1 Einleitung

Im Wintersemester 2013/14 habe ich eine vierstündige Vorlesung mit dem Titel 'Dynamische Systeme' an der Universität Mainz gehalten. Dazu habe ich ein Skript geschrieben, von dem es eine deutsche und eine englische Version gibt. Das folgende Dokument ist ein Skript für eine zweistündige Vorlesung im Sommersemester 2017. Die Themen dieser zwei Vorlesungen sind ähnlich aber die zweite konnte aus Zeitgründen viel weniger Material behandeln. Der größte Unterschied ist, dass manche längere Beweise in der zweiten Vorlesung weggelassen wurden. Dort werden allgemeine Sätze in der Regel formuliert und nicht bewiesen. Die Beweise, die es dort gibt kommen im Rahmen von Anwendungen der allgemeinen Sätze vor. Wenn es passt werden Teile des Skripts der älteren Vorlesung direkt übernommen.

In diesem Text bedeutet der Ausdruck 'dynamisches System' nichts anderes als ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Warum wird also dieser Ausdruck hier verwendet? Es geht darum zu betonen, dass die gewöhnlichen Differentialgleichungen und ihre Lösungen hier auf eine bestimmte Art und Weise betrachtet werden sollen. Eine mathematische Aufgabe, die die gewöhnlichen Differentialgleichungen uns stellen ist, sie explizit zu lösen. Dabei sucht man nach Formeln für die Lösungen, wobei es erlaubt ist, Kombinationen von bestimmten 'elementaren Funktionen' wie Potenzen, der Exponentialfunktion, Sinus usw. zu verwenden. Es ist bekannt, das dies nicht bei allen Gleichungen geht und um weiter zu kommen kann man neue Funktionen einführen (z. B. elliptische Funktionen) die ihrerseits nichts anderes sind als Lösungen von bestimmten Differentialgleichungen, die man schon genauer untersucht hat. Es ist aber so, dass man die meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen in keinem nützlichen Sinne 'explizit' lösen kann.

Was gibt es für Alternativen? Manche denken (insbesondere manche Wissenschaftler, die keine Mathematiker sind) dass es nur zwei Möglichkeiten gibt. Die erste ist, dass man die strenge Mathematik hinter sich lässt und zu heuristischen Näherungsverfahren übergeht. Z. B. glaubt man, dass in einer gegebenen Anwendung eine bestimmte Größe klein ist und man geht zu einer neuen Gleichung über, in dem man diese Größe in der Ausgangsgleichung gleich Null setzt. Die zweite Methode ist, dass man die Gleichungen diskretisiert und die diskreten Gleichungen die dadurch entstehen auf dem Computer löst. In beiden Fällen hat man eine Näherung eingeführt. Aus mathematischer Sicht hat man ein System von Gleichungen durch ein zweites ersetzt und es ist zu klären, was die Lösungen der beiden Systeme miteinander zu tun haben. Diese Methoden können oft zu guten Ergebnissen führen. Was hier betont werden soll ist, dass es auch eine andere Alternative gibt. (Oft ist es die beste Strategie, alle drei Methoden miteinander zu kombinieren.)

Was ist die dritte Alternative? Es geht darum, mathematisch strenge Aussagen über das qualitative Verhalten von Lösungen zu beweisen. In dem Zusammenhang ist es oft besser, anstatt Lösungen einzeln zu untersuchen, die Beziehungen zwischen verschiedenen Lösungen zu betrachten. Es ist auch hilfreich, das Problem geometrisch zu betrachten. Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht aus Gleichungen der Form

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_j) \tag{1}$$

für reellwertige Funktionen $x_i(t), 1 \leq i \leq m$ und reellwertige Funktionen f_i von $m + 1$ Variablen. Zusammen definieren die f_i eine Abbildung mit Werten im $\mathbb{R}^m$, die wir mit f bezeichnen. Wenn f nicht von t abhängt nennt man das System autonom. In dieser Vorlesung werden wir uns hauptsächlich auf den Fall der autonomen Systeme konzentrieren, weil die Sichtweise der dynamischen Systeme in dem Fall besonders hilfreich ist. Wenn man will kann man den nichtautonomen Fall auf den autonomen reduzieren, in dem man das erweiterte System

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(y, x_j), \quad \frac{dy}{dt} = 1 \tag{2}$$

betrachtet. Die Existenz einer Lösung $x(t)$ des ursprünglichen Systems mit $x(t_0) = x_0$ ist äquivalent zur Existenz einer Lösung $(x(t), y(t))$ des erweiterten Systems mit $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = t_0$. Mit dem geometrischen Standpunkt betrachtet man die x_i als Koordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^m$ und f_i im autonomen Fall als die Komponenten eines Vektorfeldes. Die Lösungen der Gleichungen sind die Integralkurven des Vektorfeldes. Es ist dann natürlich, die Gleichungen (1) im autonomen Fall als die vektorwertige Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3}$$

zu schreiben. Die Funktion f ist auf einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^m$ definiert. Anfangsbedingungen der Form $x_i(t_0) = a_i$ für eine Lösung $x_i(t)$ bedeuten, dass die Integralkurve sich zum Zeitpunkt t_0 im Punkt mit den Koordinaten a_i befindet. Diese Art, die Dinge zu sehen, ist typisch für die Denkweise der dynamischen Systeme. Die mathematischen Objekte sind die gleichen. Es ist nur so, dass man etwas anders über sie redet und denkt, weil man dadurch eine andere geometrische Intuition mobilisieren möchte. Diese Sichtweise, die ein große Neuigkeit in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen war, wurde in erster Linie von Henri Poincaré eingeführt [10]. Es werden hier nur

Systeme erster Ordnung betrachtet, weil es einfach ist, ein System der Ordnung k auf ein System erster Ordnung zu reduzieren in dem man die Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ als neue Variablen einführt.

Um mit Lösungen umzugehen, die nicht explizit sind, muss man festlegen können, um welche Lösung es sich handelt. Das heißt, dass man wissen muss wie viele Lösungen es gibt und wie man sie parametrisieren kann. Die übliche Art dies zu tun ist das Anfangswertproblem und deshalb befasst sich der nächste Abschnitt mit diesem Thema.

Der Begriff 'dynamisches System' wird oft in einem breiteren Sinn verwendet, wobei andere Arten von Evolutionsgleichungen zugelassen werden. Es könnten z. B. bestimmte partielle Differentialgleichungen sein, oder Gleichungen mit Verzögerung. Dabei verwendet man eine Analogie zwischen den gewöhnlichen Differentialgleichungen und diesen anderen Gleichungen, wobei der euklidische Raum durch einen unendlichdimensionalen Funktionenraum ersetzt wird. Es gibt große Unterschiede zwischen diesen Klassen von Gleichungen, wodurch die Analogien gefährlich sein können aber auch viele Ähnlichkeiten, wodurch die Analogien sehr nützlich sein können. Der folgende Text beschränkt sich auf den Fall von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

2 Das Anfangswertproblem

Das Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen gehört zum Stoff der Vorlesung Analysis II. Das fundamentale Ergebnis über lokale Existenz und Eindeutigkeit ist

Satz 1 Sei f eine stetige Funktion auf der Menge

$$\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : t_0 \le t \le t_0 + a, |x - x_0| \le b\} \tag{4}$$

mit Werten im $\mathbb{R}^m$, die eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x erfüllt. Sei M eine Schranke für $|f|$ und $\alpha = \min\{a, b/M\}$. Dann hat die Gleichung $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $[t_0, t_0 + \alpha]$ mit $x(t_0) = x_0$.

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Lipschitz-Bedingung gilt ist, dass die Funktion stetig differenzierbar ist. Es ist jetzt behauptet worden, dass die Lösung auf dem Intervall auf dem sie im Satz konstruiert wurde eindeutig ist. In Wirklichkeit ist die Lösung der Gleichung (3) mit gegebenem Anfangswert auf jedem Intervall eindeutig, wo sie definiert ist, wenn f lokal Lipschitz ist. Wir betrachten zwei Lösungen x und y auf einem Intervall $[t_0, t_1)$ mit $x(t_0) = y(t_0)$. Hier darf t_1 auch unendlich sein. Sei t_* das Supremum der Zahlen t mit der Eigenschaft, dass $x = y$ auf dem Intervall $[t_0, t)$. Wegen der lokalen Eindeutigkeit ist $t_* > t_0$. Die Lösungen x und y sind gleich auf dem Intervall $[t_0, t_*)$ und deshalb durch Stetigkeit, sofern $t_* < \infty$, auf dem Intervall $[t_0, t_*]$. Wenn $t_* < \infty$ können wir das Anfangswertproblem mit Anfangzeit t_* und Anfangsbedingung $x(t_*) = y(t_*)$ betrachten. Aus der lokalen Eindeutigkeit kann dann geschlossen werden, dass $x = y$ auf einem Intervall der

Form $[t_*, t_* + \alpha]$, ein Widerspruch zur Definition von t_*. Hier wurde nur der Fall $t \geq t_0$ betrachtet, aber ein ähnliches Argument gilt für $t \leq t_0$.

Ohne die Annahme einer lokalen Lipschitz-Bedingung gilt immer noch eine Aussage über die Existenz einer Lösung, die wir aber hier nicht beweisen. Es handelt sich um den Satz von Peano (vgl. [4], Abschnitt II.2). Die Eindeutigkeit gilt aber nicht mehr, wie man durch einfache Beispiele wie $\frac{dx}{dt} = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, zeigen kann. Auch wenn eine lokale Lipschitz-Bedingung gilt kann die lokale Lösung im allgemeinen nicht zu einer globalen Lösung fortgesetzt werden, wie man am einfachen Beispiel $\dot{x} = x^2$ sieht. Die Lösung mit $x(0) = 1$ ist $\frac{1}{1-t}$ und existiert nur bis $t = 1$. Wegen der Eindeutigkeit kann man das maximale Existenzintervall einer Lösung mit einem gegebenen Anfangswert definieren. Dieses Intervall kann man durch ein Fortsetzungskriterium charakterisieren. Betrachten wir die Gleichung (3), wobei die Funktion f auf einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^m$ definiert ist. Sei (t_-, t_+) das maximale Existenzintervall einer Lösung mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0 \in G$. Wenn t_+ endlich ist, dann verlässt die Lösung jede kompakte Teilmenge K von G für $t \to t_+$. Diese Aussage wird hier nicht bewiesen. Es gilt auch ein entsprechender Satz für Systeme die nicht notwendigerweise autonom sein müssen.

3 Ein Beispiel: das fundamentale System der Virusdynamik

In dieser Vorlesung wird die allgemeine Theorie durch die Betrachtung von geeigneten Beispielen aus den Naturwissenschaften begleitet. In diesem Abschnitt wird ein solches Beispiel eingeführt. Das dynamische System, das dabei betrachtet wird, das fundamentale System der Virusdynamik, wird benutzt, um die Ausbreitung von Virusinfektionen im Körper zu modellieren. Die dadurch gewonnenen Erkentnisse haben zu bedeutenden Fortschritten in der Medizin beigetragen. Der biologische Hintergrund wird jetzt kurz skizziert. Mehr Einzelheiten finden man in [8]. Die Krankheit AIDS ist Anfang der 1980er Jahre bekannt geworden und nach ein paar Jahren hatte man das Virus, das die Krankheit verursacht, HIV, isoliert. Der anfängliche Optimismus, man könnte die Krankheit bald heilen hat sich als unberechtigt erwiesen. Nach einer Infektion mit HIV und einer kurzen Anfangsphase mit grippeähnlichen Symptomen bleibt die Krankheit meistens lange (etwa 10 Jahre) symptomfrei. Erst danach kommt die Krankheit AIDS zum Ausbruch. Früher hat man geglaubt, dass das Virus in dieser Zeit aus irgendeinem Grund inaktiv wäre aber inzwischen weiss man, dass diese Auffassung falsch war. Man hat um 1995 verstanden, dass in diesen 10 Jahren ein dynamischer Prozess stattfindet, in dem riesige Mengen von Virusteilchen produziert werden. Bei diesem Fortschritt haben mathematische Modelle eine wichtige Rolle gespielt. In diesem Zusammenhang sind die modernen Kombinationstherapien gegen AIDS entstanden. Man kann die Krankheit bis heute nicht heilen aber man kann jetzt mit Medikamenten ihre gefährlichen Auswirkungen beliebig lange unterdrücken.

Das Modell, das jetzt vorgestellt wird hat, obwohl es in der AIDS-Forschung verwendet wurde, keine besondere Beziehung zum HIV und kann benutzt werden, um viele Viruserkrankungen zu modellieren. Es gibt drei Variablen. Die Population von Zellen, die nicht mit dem Virus infiziert sind, heißt x, die Population von infizierten Zellen heißt y und die Anzahl von Virus-Teilchen heißt v. Die Gleichungen lauten

$$\dot{x} = \lambda - dx - \beta xv, \tag{5}$$

$$\dot{y} = \beta xv - ay, \tag{6}$$

$$\dot{v} = ky - uv. \tag{7}$$

Hier bedeutet der Punkt die Ableitung nach t und die Größen λ, d, β, k und u sind positive Konstanten. Wegen ihrer Interpretation sollen die Größen x, y und v positiv sein, obwohl das Gleichungssystem überall im $\mathbb{R}^3$ definiert und regulär ist. Die Phänomene, die den verschiedenen Parametern entsprechen sind folgende. Neue Zellen entstehen im Körper durch Zellteilung (λ), nichtinfizierte Zellen sterben (d), Viren infizieren Zellen (β), infizierte Zellen sterben (a), Viren werden durch infizierte Zellen freigesetzt (k), Viren werden eliminiert (u). Ein Eingreifen des Immunsystems wird nicht berücksichtigt. Bei HIV sind die beteiligten Zellen selbst Immunzellen (weisse Blutkörperchen), aber diese Tatsache spielt im Modell keine Rolle.

Genau genommen bedeutet die Größe v die Anzahl von Virus-Teilchen außerhalb der Zellen. Dieses Modell vernachlässigt die Tatsache, dass bei der Infektion einer Zelle die Anzahl der Virusteilchen außerhalb der Zelle sich um Eins verringert. Deshalb sollte die Gleichung für $\dot{v}$ einen zusätzlichen Term $-\beta xv$ enthalten. Es wird aber argumentiert, dass dieser Term im Vergleich zu anderen Termen in dieser Gleichung klein ist, so dass man ihn vernachlässigen kann. Aus mathematischer Sicht bekommt man auf diese Weise ein neues System, das wir als 'modifiziertes fundamentales Modell der Virusdynamik' bezeichnen. Man kann den Zusatzterm als $-\delta\beta xv$ schreiben, wobei der Parameter δ den Wert Null oder Eins annimmt.

Die Funktionen auf der Rechten Seite von (5)-(7) sind offensichtlich stetig differenzierbar und deshalb kann man den Satz über lokale Existenz und Eindeutigkeit auf dieses System anwenden. Wegen der Interpretation der Unbekannten betrachtet man Anfangsdaten die positiv sind (d.h. x, y und v sind positiv) und man erwartet, dass die Lösungen positiv bleiben. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nicht offensichtlich und wird jetzt vorgeführt.

Hilfssatz 1 Sei $(x(t), y(t), v(t))$ eine Lösung des Systems (5)-(7) auf einem Intervall $[t_0, t_1)$ mit $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ und $v(t_0) = v_0$. Wenn x_0, y_0 und v_0 positiv sind, dann sind $x(t)$, $y(t)$ und $v(t)$ positiv für alle $t \in [t_0, t_1)$.

Beweis Wir nennen die Variablen x_i. Wenn es ein i und ein t gibt mit $x_i(t) = 0$ sei t_* das Infimum solcher t für alle i. Dann ist die Einschränkung der Lösung auf das Intervall $[t_0, t_*)$ positiv und $x_i(t_*) = 0$ für einen bestimmten Wert von i. Die Gleichung für x_i kann in der Form $\dot{x}_i = -x_i f(x) + g(x)$ geschrieben werden, wo $g(x)$ nicht negativ ist. Deshalb ist $\dot{x}_i \geq -x_i f(x)$ und $\frac{d}{dt}(\log x_i) \geq -f(x) \geq -C$, wo C eine positive Konstante ist. Dabei wird verwendet, dass die Lösung in einem Kompaktum bleibt. Es folgt, dass $x_i(t_*) \geq x_i(t_0)e^{-C(t_*-t_0)} > 0$, ein Widerspruch.

Es wird jetzt gezeigt, mit Hilfe des Fortsetzungskriteriums, dass alle Lösungen des Systems (5)-(7) mit positiven Anfangsbedingungen global in der Zukunft existieren. Dazu reicht es zu zeigen, dass alle Variablen auf einem beliebigen endlichen Intervall $[t_0, t)$ nach oben beschränkt sind. Die Summe der ersten zwei Gleichungen ergibt, dass $\frac{d}{dt}(x+y) \leq \lambda$ und dass $x(t) + y(t) \leq x(t_0) + y(t_0) + \lambda(t - t_0)$. Deshalb sind x und y auf jedem endlichen Intervall beschränkt. Die dritte Gleichung zeigt dann, dass $v(t)$ nicht schneller als linear wachsen kann und deshalb auch auf jedem endlichen Intervall beschränkt ist. In der Tat sind alle Variablen in der Zukunft global beschränkt. Man kann zeigen, dass

$$x(t) + y(t) \leq C_1 = \max\left\{x(t_0) + y(t_0), \frac{\lambda}{\min\{a,d\}}\right\}, \tag{8}$$

$$v(t) \leq C_2 = \max\left\{v(t_0), \frac{kC_1}{u}\right\}. \tag{9}$$

Insbesondere ist die Lösung global beschränkt. Diese Aussagen werden jetzt bewiesen. Nehmen wir an, dass es eine Zeit t gibt mit $x(t) + y(t) = \alpha > C_1$. Sei t_* das Infimum der Zeiten, wo diese Ungleichung gilt, mit α fest. Dann ist $\dot{x}(t_*) + \dot{y}(t_*) \geq 0$. Auf der anderen Seite implizieren die Gleichungen (5) und (6), dass diese Größe negativ ist, ein Widerspruch. Damit ist (8) bewiesen. Die Ungleichung (9) kann mir der gleichen Methode bewiesen werden, wobei die schon bekannte Schranke für $x + y$ benutzt wird. Es kann mit den gleichen Methoden gezeigt werden, dass die Lösungen des modifizierten Systems mit ($\delta = 1$) beschränkt sind und dass die Unbekannten die gleichen Schranken erfüllen wie im Fall $\delta = 0$. Wenn die Anfangsdaten die Ungleichungen $x_0 + y_0 \leq \frac{\lambda}{\min\{a,d\}}$ und $v_0 \leq \frac{k\lambda}{u\min\{a,d\}}$ erfüllen dann muss die ganze Lösung diese Ungleichungen erfüllen. Das heißt, wir haben eine invariante Teilmenge identifiziert.

4 Abhängigkeit von Anfangsbedingungen und Parametern

Wir betrachten eine Lösung $x(t) = \phi(t_0, t, x_0)$ der Gleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Die Abbildung ϕ wird als Fluss des dynamischen Systems bezeichnet. Im autonomen Fall hängt $\phi(t_0, t, x_0)$ nur von $t - t_0$ und x ab und wir schreiben auch $\phi(t, x)$ als Abkürzung für $\phi(0, t, x)$. Die Lösung ist auf einem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) definiert, wobei t_- und t_+ von t_0 und x_0 abhängen dürfen. In diesem Abschnitt betrachten wir die Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Abbildung ϕ. Mit anderen Worten geht es um die Frage, ob die Lösung des Anfangswertproblems stetig bzw. differenzierbar von den Anfangsdaten abhängt. Wir betrachten auch den allgemeineren

Fall einer Gleichung $\dot{x} = f(t, x, z)$ wobei die Koordinaten des Punktes $z \in \mathbb{R}^k$ als Parameter betrachtet werden.

Fragen der Abhängigkeit von Anfangsdaten und Abhängigkeit von Parametern können oft durch Variablentransformationen ineinander überführt werden. Betrachten wir zuerst das Anfangswertproblem ohne Parameter. In dem wir $\tilde{t} = t - t_0$ und $\tilde{x} = x - x_0$ einführen bekommen wir das neue Problem $\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(\tilde{t} + t_0, \tilde{x} + x_0)$ mit $x(0) = 0$. Hier werden t_0 und x_0 als Parameter betrachtet und die Anfangsbedingung ist fest. Umgekehrt kann man das Problem mit Parametern durch das Problem

$$\dot{x} = f(t, x, z), \dot{z} = 0; \quad x(t_0) = x_0, z(t_0) = z_0 \tag{10}$$

ohne Parameter in den Gleichungen ersetzen. Aus dem Grund kann man oft Aussagen über Probleme die Parameter enthalten auf Aussagen ohne Parameter zurückführen.

Satz 2 Sei f eine stetige Funktion auf der Menge

$$\{(t, x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b, |z - z_0| \leq b'\} \tag{11}$$

mit Werten im $\mathbb{R}^m$, die eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x erfüllt . Sei M eine Schranke für $|f|$ und $\alpha = \min\{a, b/M\}$. Dann hat die Gleichung $\dot{x} = f(t, x, z)$ eine eindeutige Lösung $\phi(t_0, t, x_0, z)$ auf dem Intervall $[t_0, t_0 + \alpha]$ mit $\phi(t_0, t_0, x_0, z)) = x_0$. Die Abbildung ϕ ist stetig.

Die stetige Abhängigkeit hat eine große Bedeutung für die Anwendungen von Differentialgleichungen. Wenn wir eine solche Gleichung benutzen, um ein Phänomen in der Wirklichkeit zu modellieren müssen wir beachten, dass wir die relevanten Parameter und Anfangsdaten nur näherungsweise kennen. Jede Messung ist fehlerbehaftet. Um eine brauchbare Vorhersage zu bekommen müssen wir wissen, dass eine kleine Abweichung in den Daten, die wir in die Modellierung eingeben nur eine kleine Abweichung in der Lösung, und deshalb in der Vorhersage des Modells, verursacht. Dazu brauchen wir die Stetigkeit, die im Satz 2 behauptet wird. Wenn ein Anfangswertproblem die Eigenschaften Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten besitzt, dann sagen wir, dass das Anfangswertproblem sachgemäß gestellt ist.

Wenn wir das entsprechende globale Problem betrachten wollen, müssen wir nur beachten, wie das maximale Existenzintervall von x_0 und z abhängt. Es kann passieren, dass $t_- = -\infty$ oder $t_+ = +\infty$. Deshalb ist es nützlich bei der Beschreibung solcher Größen die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu verwenden. Die Vereinigung der maximalen Existenzintervalle für verschiedene Werte von t_0, x_0 und z ist eine offene Teilmenge. Es folgt insbesondere, dass der obere Endpunkt des maximalen Existenzintervalls, als Funktion mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ betrachtet, eine unterhalbstetige Funktion von x_0 und z ist. Wir erinnern an die Definition.

Definition Eine Funktion F mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ auf einem topologischen Raum X heißt unterhalbstetig wenn die Bedingung $F(x_1) > a$ für einen Punkt $x_1 \in X$ und eine reelle Zahl a impliziert, dass es eine Umgebung U von x_1 gibt, so dass $F(x) \geq a$ für alle $x \in U$. Eine Funktion F heißt oberhalbstetig wenn $-F$ unterhalbstetig ist.

Der untere Endpunkt des Existenzintervalls ist oberhalbstetig. Intuitiv bedeutet diese Aussage, dass wenn man Anfangsbedingungen und Parameter variiert die Existenzzeit nicht plötzlich schrumpfen kann. Die Existenzzeit kann aber plötzlich wachsen (t_+ ist nicht oberhalbstetig). Ein Beispiel ist $\dot{x} = x^2 - zx^3$ mit $x(0) = 1$. Für $z = 0$ ist $t_+ = 1$ aber für $z > 0$ ist $t_+ = \infty$. In dem Fall ist eine Lösung die einmal Null ist immer Null. Deshalb kann eine Lösung die positiv anfängt nie negativ werden. Auf der anderen Seite ist $\dot{x} < 0$ wenn $x > z^{-1}$, so dass die Lösung von oben beschränkt ist. Deshalb folgt globale Existenz in der Zukunft für $z > 0$ aus dem Fortsetzungskriterium.

Wir haben jetzt stetige Abhängigkeit für kontinuierliche Parameter z bewiesen. Entsprechende Ergebnisse gelten für einen diskreten Parameter. Sei $f_n(t, x)$ eine Folge von stetigen Funktionen, die für $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ und $|x - x_0| \leq b$ definiert sind und eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x erfüllen wobei die Lipschitz-Konstante K nicht von n abhängt und die Folge gleichmäßig gegen eine Funktion $f(t, x)$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge x_n von Lösungen der Gleichungen $\dot{x}_n = f_n(t, x_n)$ mit Anfangsdaten $x_n(t_0) = x_0$ gleichmäßig gegen eine Lösung x der Gleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit den gleichen Anfangsdaten. Aus diesem Ergebnis folgt durch eine geeignete Variablentransformation eine entsprechende Aussage für Folgen von Anfangsdaten. Seien $x_n(t)$ die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = x_{0,n}$ und $x_{0,n} \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann konvergiert $x_n(t)$ gegen die Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Mit den Aussagen über stetige Abhängigkeit können wir ein paar allgemeine Begriffe einführen, die nützlich sind bei der Untersuchung der globalen Eigenschaften von Lösungen eines dynamischen Systems. Betrachten wir ein dynamisches System, das auf einer Teilmenge G des $\mathbb{R}^m$ definiert ist und eine Lösung $x(t)$ dieses Systems, die auf dem Intervall $[t_0, \infty)$ definiert ist. Wenn es eine Folge $\{t_n\}$ in $[t_0, \infty)$ mit $t_n \to \infty$ und $x(t_n) \to y \in \mathbb{R}^m$ für $n \to \infty$, dann heißt y ω-Limespunkt der Lösung x. Die Menge aller ω-Limespunkte der Lösung x heißt ω-Limesmenge von x. Wenn eine Lösung $x(t)$ auf dem Intervall $(-\infty, t_0]$ definiert ist, es eine Folge $\{t_n\}$ gibt mit $t_n \to -\infty$ und $x(t_n) \to y \in \mathbb{R}^m$ dann heißt y α-Limespunkt der Lösung x. Die Menge aller α-Limespunkte der Lösung x heißt α-Limesmenge von x. Zu jeder Aussage über ω-Limespunkte gibt es eine entsprechende Aussage für α-Limespunkte. Um diese zu erhalten betrachtet man die Lösung $\tilde{x}(t) = x(-t)$. Aus diesem Grund werden wir nur die Aussagen über ω-Limespunkte beweisen und es dem Leser überlassen, diese in Aussagen für α-Limespunkte zu übertragen.

Die ω-Limesmenge ist abgeschlossen. Sei $\{y_n\}$ eine Folge von ω-Limespunkten einer Lösung x die gegen $y \in \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann gibt es Folgen $\{t_{n,k}\}$ mit $t_{n,k} \to \infty$ für $k \to \infty$ und $x(t_{n,k}) \to y_n$. Wenn $\epsilon > 0$ gibt es N mit der Eigenschaft, dass $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Außerdem gibt es $k(n) \geq n$ mit der Eigenschaft, dass $|x(t_{n,k(n)}) - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Deshalb ist $|x(t_{n,k(n)}) - y| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und $t_{n,k(n)} \to \infty$ für $n \to \infty$. Es folgt, dass y der ω-Limesmenge von x gehört und dass diese Menge abgeschlossen ist. Wenn die Lösung x beschränkt ist, dann ist die ω-Limesmenge kompakt. Weil wenn x beschränkt ist, ist die ω-Limesmenge von x auch beschränkt. Da sie abgeschlossen ist, ist sie kompakt. Wenn die Lösung x beschränkt ist, dann ist die ω-Limesmenge von x nicht leer und sie ist zusammenhängend. Sei $\{t_n\}$ eine beliebige Folge in $[t_0, \infty)$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Weil diese Folge beschränkt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge, die gegen $y \in \mathbb{R}^m$ konvergiert. Der Punkt y ist in der ω-Limesmenge von x und deshalb ist diese Menge nicht leer. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die Eigenschaften $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$ für offene Teilmengen U und V von X implizieren, dass entweder U oder V leer ist. Sei jetzt X die ω-Limesmenge von x und nehmen wir an, dass U und V Teilmengen mit den soeben erwähnten Eigenschaften sind. Wir nehmen an, dass keine der beiden leer ist und bekommen einen Widerspruch. Sei also $y_1 \in U$ und $y_2 \in V$. Es existieren t_{2n} mit $|x(t_{2n+1}) - y_1| < \frac{1}{n}$, t_{2n+1} mit $|x(t_{2n}) - y_2| < \frac{1}{n}$ und $t_{2n} \leq t_{2n+1} \leq t_{2n+2}$ für alle n. Für n groß genug ist $t_{2n} \in U$ und $t_{2n+1} \in V$. Sei $t'_n \leq t_{2n+1}$ die erste Zeit nach t_{2n} für die $x(t'_n)$ nicht in U liegt. Eine solche Zeit existiert. $x(t'_n)$ kann nicht in V liegen, da in dem Fall $x(t)$ in V liegen würde für alle t in einer offenen Umgebung von t'_n. Auf diese Weise bekommen wir also eine Folge t'_n mit der Eigenschaft, dass $x(t'_n)$ im Komplement von $U \cup V$ liegt. Diese Folge hat eine Teilfolge, die nach $y \in \mathbb{R}^m$ konvergiert. Der Punkt y ist ein ω-Limespunkt von x und liegt nicht in X, ein Widerspruch.

Wenn ein dynamisches System auf G definiert ist heißt eine Menge A vorwärts-invariant, wenn aus $x(t_0) \in A$ folgt, dass $x(t) \in A$ für alle $t \geq t_0$. Wenn $x_0 \in G$ ist die vorwärts-Integralkurve durch x_0 das Bild der Lösung auf $[t_0, t_+)$ mit $x(t_0) = x_0$. Eine Teilmenge A ist genau dann vorwärts-invariant wenn die vorwärts-Integralkurve durch jeden Punkt von A in A enthalten ist. Manchmal wird das Wort 'vorwärts' in diesen Begriffen weggelassen, wenn die Bedeutung aus dem Zusammenhang hervorgeht. Wenn x eine Lösung ist und die ω-Limesmenge von x in G liegt, dann ist diese ω-Limesmenge invariant. Um diese Aussage zu beweisen, sei y_0 ein Punkt in der ω-Limesmenge einer Lösung x. Sei $\{t_n\}$ eine Folge mit $x(t_n) \to y$. Sei $\tilde{x}_n(t) = x(t - t_n)$. Dann konvergiert $\tilde{x}_n(0)$ gegen y_0. Sei y die Lösung mit $y(0) = y_0$. Als Folge der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von Anfangsdaten konvergiert $\tilde{x}_n(t)$ gegen $y(t)$. Da $x(t + t_n) = \tilde{x}_n(t)$ liegt $y(t)$ in der ω-Limesmenge von x für alle t für die diese Größe definiert ist.

Es ist auch so, dass Lösungen differenzierbar von den Anfangsdaten und Parametern abhängen. Diese Aussage hat, wie die stetige Abhängigkeit, eine große praktische Bedeutung. Der Sinn einer Ableitung ist, dass sie uns erlaubt, nichtlineare Funktionen durch lineare zu approximieren. Dadurch können wir oft konkrete Rechnungen durchführen, die uns Informationen über die Lösung liefern.

Satz 3 Sei die Funktion f in Satz 2 stetig differenzierbar. Dann ist der Fluss $\phi(t_0, t, x_0, z)$ auch stetig differenzierbar. Die Ableitungen erfüllen die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0,j}}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_{0,j}}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_j}\right)=\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial z_j}+\frac{\partial f_i}{\partial z_j}. \tag{13}$$

mit Anfangsdaten δ^i_j bzw. 0. Außerdem gilt

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_0}=-\frac{\partial x_i}{\partial x_{0,j}}f_j. \tag{14}$$

In diesen Gleichungen, und an vielen Stellen im folgenden Text, wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet: über wiederholte Indizes wird summiert.

In dem man die Ergebnisse über die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen nach den Anfangsdaten und die Transformation benutzt, die Parameter durch Anfangsdaten ersetzt bekommt man die Aussage über die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von Parametern. Man bekommt auch die Evolutionsgleichung für die Ableitungen nach den Variablen z_i.

Betrachten wir jetzt eine Gleichung der Form $\dot{x}=f(t,x,z,z^*)$, wo die partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich x und z der stetigen Funktion f existieren und stetig sind. Diese Gleichung hat eine eindeutige Lösung $x=\phi(t_0,t,x_0,z,z^*)$ mit $x(t_0)=x_0$. Die Lösung hat partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich t, t_0, x_0 und z und diese Ableitungen sind stetig als Funktionen von (t_0,t,x_0,z,z^*). Diese Aussagen können so bewiesen werden wie Satz 3, weil die Variablen z^* keine wesentliche Rolle spielen.

Mit diesen Ergebnissen ist es einfach, die Existenz und Stetigkeit von höheren Ableitungen von x zu zeigen wenn die Existenz and Stetigkeit von entsprechenden Ableitungen von f bekannt ist. Diese Aussage kann man durch Induktion beweisen. Um konkret zu sein, betrachten wir eine partielle Ableitung von $\phi(t_0,t,x_0,z,z^*)$ nach den Variablen x_0 und z der Ordnung n. Die Ableitung von ϕ nach x_0 erfüllt die Gleichung (12) und die Koeffizienten dieser Gleichung haben stetige Ableitungen nach x_0 und z der Ordnungen bis $n-1$. Deshalb besitzt die Lösung dieser Gleichung auch solche Ableitungen. Wir können auch entsprechend mit der Ableitung von ϕ nach z verfahren, mit Hilfe der Gleichung (13). Es kann daraus geschlossen werden, dass alle Ableitungen von ϕ nach x und z bis zur Ordnung n existieren und stetig sind. Aussagen über Ableitungen nach t_0 können erhalten werden in dem die bereits bekannten Aussagen in die Gleichung (14) eingesetzt werden.

Die Aussagen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die jetzt angegeben wurden können benutzt werden, um etwas über das qualitative Verhalten von Lösungen im allereinfachsten Fall zu beweisen. Es geht um die Natur eines Flusses in der Nähe eines Punktes, wo das Vektorfeld das ihn erzeugt nicht verschwindet.

Satz 4 (Satz über den Flusskasten). Sei $\dot{x}=f(x)$ ein autonomes dynamisches System wo f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer Teilmenge G des $\mathbb{R}^m$ ist. Sei $x_0\in G$ ein Punkt mit $f(x_0)\neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von 0 im $\mathbb{R}^{m-1}$, eine positive Zahl ϵ und einen Diffeomorphismus F von $[-\epsilon,\epsilon]\times V$ auf eine offene Umgebung U von x_0 mit $F(0)=x_0$, so dass der Fluss

ϕ des Systems die Beziehung

$$\phi(t, F(y))) = F(T_t(y)) \tag{15}$$

erfüllt. Hier ist T_t die Translation um den Abstand t in die Richtung x_1, d.h. $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (x_1 + t, x_2, \ldots, x_m)$.

Dieses Ergebnis sagt, dass man ein beliebiges Vektorfeld in der Nähe eines Punktes wo es nicht verschwindet durch einen Diffeomorphismus zum einfachen Vektorfeld mit Komponenten $(1, 0, \ldots, 0)$ transformieren kann. Intuitiv ausgedrückt, in der Nähe eines Punktes wo es nicht verschwindet hat ein Vektorfeld keine Struktur. Wenn zwei Vektorfelder mit Flüssen ϕ und ψ eine Beziehung der Form $F(\phi(t, x)) = \psi(t, F(x))$ für einen C^1-Diffeomorphismus F erfüllen, dann heißen sie C^1-konjugiert. Es folgt aus dem Satz über den Flusskasten, dass wenn $f(x_0)$ und $g(y_0)$ nicht verschwinden die Einschränkungen von f und g auf geeignete Umgebungen von x_0 und y_0 C^1-konjugiert sind. Wenn die Abbildung F nur stetig ist, dann heißen f und g topologisch konjugiert. In diesem Fall werden die Integralkurven von f auf die von g abgebildet und die Zeitrichtung bleibt erhalten. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, aber die Zeitkoordinaten auf den Integralkurven die durch F verbunden werden nicht notwendigerweise gleich sind heißen f und g topologisch äquivalent.

5 Stationäre Lösungen und ihre Stabilität

Wir haben gesehen, dass in der Nähe von Punkten wo ein Vektorfeld nicht verschwindet, der dazugehörige Fluss ein sehr einfaches qualitatives Verhalten hat. Wo das Vektorfeld in einem Punkt verschwindet können die Dinge viel komplizierter werden. Wenn $f(x_0) = 0$ dann ist $x(t) = x_0$, eine zeitunabhängige Lösung, eine stationäre Lösung. Die Gleichung $f(x) = 0$ ist im allgemeinen schwer zu lösen. Es ist schon schwer zu sagen, wie viele Lösungen sie hat. Jetzt wird ein Ergebnis präsentiert, das die Existenz einer Lösung unter schwachen Voraussetzungen garantiert.

Satz 5 Sei ein dynamisches System auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ gegeben und sei A eine invariant Teilmenge, die homöomorph ist zu einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^m$. Dann liegt mindestens eine stationäre Lösung in A.

Man kann diesen Satz auf das fundamentale System der Virusdynamik anwenden, wobei A das invariante Gebiet für dieses System ist, dass wir schon gefunden haben. Daraus folgt, dass das System für beliebige positive Werte der Parameter mindestens eine nichtnegative stationäre Lösung besitzt. Für dieses System sind es die positiven Lösungen, die am interessantesten sind. Trotzdem haben andere Lösungen die nicht negativ sind ein gewisses Interesse. Man kann sie unter Umständen benutzen, um etwas über das asymptotische Verhalten von positiven Lösungen herauszufinden. Sie können auch interessante Grenzfälle des ursprünglichen Systems sein. Zum Beispiel entspricht eine Lösung des fundamentalen Systems der Virusdynamik mit $y = 0$ und $v = 0$ dem Zustand einer gesunden Person (keine freien Virus-Teichen, keine infizierten Zellen).

Das fundamentale System der Virusdynamik ist einfach genug, dass man die stationären Lösungen explizit ausrechnen kann. Die Koordinaten einer stationären dieses Systems werden mit einem Stern versehen. Die dritte Gleichung liefert $y^* = \frac{u}{k} v^*$. Wenn man diese Beziehung in die zweite Gleichung einsetzt haben beide Seiten einen Faktor v^*. Für eine positive Lösung können wir diesen gemeinsamen Faktor kürzen, mit dem Ergebnis $x^* = \frac{au}{\beta k}$. Wenn wir diese Beziehung in die erste Gleichung einsetzen, bekommen wir $v^* = \frac{d}{\beta} \left(\frac{\beta k \lambda}{adu} - 1 \right)$. Sei $R_0 = \frac{\beta k \lambda}{adu}$. Dieses Objekt heißt bei den Biologen fundamentales Vermehrungsverhältnis. Wir sehen, dass es eine positive stationäre Lösung nur dann geben kann, wenn $R_0 > 1$. Wenn man die Gleichung für x^* in die zweite Gleichung für stationäre Lösungen einsetzt sieht man, dass $y^* = \frac{u}{k} v$ und dass $y^* = \frac{du}{\beta k}(R_0 - 1)$. Jetzt haben wir zwei Dinge bewiesen. Wenn $R_0 > 1$ gibt es genau eine positive stationäre Lösung, die wir explizit berechnet haben. Wenn $R_0 \leq 1$ gibt es keine positive stationäre Lösung. Wenn wir nichtnegative Lösungen zulassen, dann ist $v^* = 0$ auch eine Möglichkeit. Dann ist auch $y^* = 0$. Die verbleibende Gleichung sagt dass in diesem Fall $x^* = \frac{\lambda}{d}$.

Die Bedeutung von stationären Lösungen hängt von ihrer Stabilität ab. Eine stationäre Lösung x^* heißt stabil wenn es zu jeder Umgebung U von x^* eine Umgebung V von x^* gibt, so dass für jede Lösung $x(t)$ die Bedingung $x(t_0) \in V$ die Bedingung $x(t) \in U$ für alle $t \geq t_0$ impliziert. In Worten, jede Lösung, die in V startet bleibt in U so lange sie existiert. Die stationäre Lösung x^* heißt asymptotisch stabil wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von x^* gibt so dass $x(t_0) \in U$ impliziert $x(t) \to x^*$ für $t \to \infty$. Die erste Bedingung in dieser Definition folgt nicht aus der zweiten, wie das folgende Beispiel zeigt (cf. [9]).

$$\dot{x} = x - rx - ry + xy, \tag{16}$$

$$\dot{y} = y - ry + rx - x^2. \tag{17}$$

Dieses System ist C^1. Das qualitative Verhalten ist einfacher zu sehen in Polarkoordinaten, wo das System die Form

$$\dot{r} = r(1 - r), \tag{18}$$

$$\dot{\theta} = r(1 - \cos\theta) \tag{19}$$

hat. Es gibt stationäre Punkte bei $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Alle Lösungen außer der stationären Lösung im Ursprung konvergieren gegen $(0, 1)$ für $t \to \infty$ aber dieser Punkt ist nicht stabil. Diese Aussagen werden hier nicht bewiesen, da die dazu notwendigen Techniken noch nicht eingeführt wurden.

Eine Art, die Stabilität einer stationären Lösung x^* zu untersuchen ist das System um x^* zu linearisieren. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von f um x^*, $f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)(x_j - x_j^*) + o(|x - x^*|)$. Wir bezeichnen die Matrix $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ mit A. Die linearisierte Gleichung um x^* bekommt man in dem man den Restterm in der Taylor-Entwicklung, der klein sein soll, weglässt. Damit bekommt man die Gleichung $\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}$. Die Hoffnung ist, dass unter geeigneten Bedingungen Lösungen des linearisierten Systems Lösungen des ursprünglichen Systems in der Nähe von x^* approximieren. Wenn wir das qualitative Verhalten der Lösungen in der Nähe eines Punktes betrachten unterscheiden wir nicht zwischen Vektorfeldern, die topologisch konjugiert sind durch eine Abbildung die x^* festhält. Deshalb interessieren wir uns in diesem Zusammenhang nur für Eigenschaften von A die unter Ähnlichkeitstransformationen invariant sind. Da jede Matrix mit ihrer Jordanschen Normalform ähnlich ist kann es sich dabei nur um die Eigenschaften der Normalform handeln. Für eine detaillierte Diskussion von linearen Differentialgleichungen wird der Leser auf das erste Kapitel des Buches von Perko [9] verwiesen. Die Reduktion auf die Normalform ist in allgemeinen nur mit Hilfe der komplexen Zahlen möglich, weil die Eigenwerte komplex sein können. Deshalb werden wir hier gelegentlich gezwungen, komplexe lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zu betrachten, obwohl wir uns am Ende nur für reelle Lösungen von Gleichungen mit reellen Koeffizienten interessieren.

Für eine komplexe Matrix A mit einem Eigenwert λ heißen die Vektoren x, die $(A - \lambda I)^k x = 0$ für eine natürliche Zahl k erfüllen die entsprechenden verallgemeinerten Eigenvektoren. Sie bilden einen Vektorraum V_λ. Wenn eine Matrix in Normalform ist, gehören die nichtverschwindenden Einträge einer Folge von Blöcken auf der Diagonale, den Jordan-Blöcken. In jedem Block sind die diagonalen Elemente gleich einer Zahl λ, die ein Eigenwert der Matrix ist. Die Einträge unmittelbar oberhalb dieser diagonalen Einträge sind gleich Eins und alle anderen Einträge verschwinden. Nehmen wir an, dass die Blöcke die Größen n_i haben. Die Vektoren, wo nur die ersten n_1 Komponenten von Null verschieden sind, sind verallgemeinerte Eigenvektoren, die zum ersten Eigenwert λ_1 gehören. Die Vektoren, wo nur die Komponenten von $n_1 + 1$ bis $n_1 + n_2$ von Null verschieden sind gehören zum zweiten Eigenwert λ_2 und so weiter. Wenn A eine allgemeine reelle Matrix ist, und λ ein reeller Eigenwert von A, dann wird der Raum V_λ genauso wie im komplexen Fall definiert. Im Fall, dass λ ein komplexer Eigenwert ist, ist die Definition ein wenig komplizierter. Dann ist V_λ die Menge der Realteile der komplexen Lösungen von $(A - \lambda I)^k x = 0$. Weil A reell ist, ist $\bar{\lambda}$ auch ein Eigenwert und $V_{\bar{\lambda}} = V_\lambda$. Der ganze Raum ist die direkte Summe der unterschiedlichen verallgemeinerten Eigenräume.

Wenn wir die Gleichung $\dot{x} = Ax$ lösen wollen, dann können wir A in Jordan-Form bringen, die Gleichung lösen und die Lösung dann zurücktransformieren. Die Teilräume von verallgemeinerten Eigenvektoren, die zu den Eigenwerten gehören sind invariant unter dem Fluss des linearisierten Systems. Deshalb reicht es, den Fall zu betrachten, wo es nur einen Jordan-Block gibt. Wenn dieser Block von der Größe Eins ist, mit Eigenvektor λ, dann ist die Lösung von der Form $ce^{\lambda t}$ für eine Konstante c. Im allgemeinen ist die Lösung das Produkt der Funktion $e^{\lambda t}$ mit einer Matrix, deren Elemente jeweils eine Konstante mal eine Potenz von t sind. Es handelt sich im allgemeinen um komplexe Exponentialfunktionen. Wenn wir Real- und Imaginärteile bilden, um die Lösungen der reellen Gleichung zu bekommen, dann ist jeder Eintrag eine Linearkombination von Ausdrücken der Form t^k, $t^k e^{at} \cos bt$ oder $t^k e^{at} \sin bt$, wo $\lambda = a + bi$. Wenn

λ reell und positiv ist, dann wächst die Lösung, wenn sie nicht identisch Null ist, mindestens so schnell wie $e^{\lambda t}$ wenn t zunimmt. Wenn λ komplex ist, und $a > 0$, dann wächst die Lösung längs geeigneten Folgen, die nach $+\infty$ streben, mindestens so schnell wie e^{at}. Wenn λ reell und negativ ist, dann klingt die Lösung mindestens so schnell ab wenn t zunimmt wie $e^{(\lambda+\epsilon)t}$, wo $\epsilon > 0$ beliebig ist. Wenn λ komplex ist, und $a < 0$, dann klingt sie mindestens so schnell wie $e^{(a+\epsilon)t}$ ab. Es können natürlich ähnliche Aussagen für die andere Zeitrichtung gemacht werden.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist der Begriff der Exponentialfunktion einer Matrix sehr nützlich. Man definiert

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{20}$$

Für eine beliebige komplexe Matrix A konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge in dem Sinne, dass die Elemente der entsprechenden Matrizen es tun. Die Relevanz dieser Definition zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dass $e^{tA}x_0$ die Gleichung $\dot{x} = Ax$ löst mit $x(0) = x_0$. Wenn die Matrix A in Jordan-Form ist, dann ist e^{tA} die direkte Summe der Ausdrücke für die einzelnen Jordan-Blöcke. Dadurch bekommt man Abschätzungen für e^{tA} die den Abschätzungen für Lösungen linearer Gleichungen, die oben besprochen wurden entsprechen.

Wir sehen, dass für lineare Systeme Eigenwerte mit positivem Realteil mit Instabilität zu tun haben und Eigenwerte mit negativem Realteil mit Stabilität. Diese Beobachtung motiviert die folgenden Definitionen. Der Raum V_+, der durch alle verallgemeinerten Eigenvektoren aufgespannt wird, die zu Eigenwerten mit positivem Realteil gehören heißt instabiler Teilraum. Der Raum V_-, der durch alle verallgemeinerten Eigenvektoren aufgespannt wird, die zu Eigenwerten mit negativem Realteil gehören heißt stabiler Teilraum. Der Raum V_c der durch alle verallgemeinerten Eigenvektoren aufgespannt wird, die zu Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehören heißt Zentrumsteilraum. Der ganze Raum ist die direkte Summe $V_- \oplus V_c \oplus V_+$. Diese Teiläume sind invariant unter dem Fluss. Für ein lineares System gelten auf Grund der oben angegebenen Tatsachen, folgende Aussagen. Wenn alle Eigenwerte negativen Realteil haben dann ist der Ursprung asymptotisch stabil. Wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil hat, dann ist der Ursprung nicht stabil. Im folgenden werden wir analoge Aussagen für eine stationäre Lösung eines allgemeinen nichtlinearen Systems diskutieren. Dazu müssen wir aber einige weitere Ideen einführen.

Bevor wir das tun befassen wir uns mit der Linearisierung des fundamentalen Modells der Virusdynamik um die zwei stationären Lösungen. Die Linearisierung um einen beliebigen Punkt ist

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (-d - \beta v)\hat{x} - \beta x\hat{v}, \tag{21}$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \beta v\hat{x} - a\hat{y} + \beta x\hat{v}, \tag{22}$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = k\hat{y} - u\hat{v}. \tag{23}$$

Im Fall des stationären Punktes mit $v = 0$ vereinfacht sich dieser Ausdruck wesentlich und man sieht sofort, dass $-d$ ein Eigenwert ist. Die anderen beiden können dann bestimmt werden, in dem man eine quadratische Gleichung löst. Das Ergebnis ist

$$\mu = \frac{1}{2}[-(a+u) \pm \sqrt{(a+u)^2 - 4au(1-R_0)}]. \tag{24}$$

Wenn $R_0 > 1$ ist, dann sind alle Eigenwerte reelle. Zwei sind negativ and einer positiv. Wenn $R_0 > 1$ ist, dann haben alle Eigenwerte negativen Realteil. Nach den Stabilitätskriterien, die wir noch nicht bewiesen haben, ist dieser Punkt asymptotisch stabil für $R_0 < 1$ und nicht stabil für $R_0 > 1$. Intuitiv haben diese Aussagen folgende Bedeutung. Der Zustand einer gesunden Person wird durch diese stationäre Lösung dargestellt. Wenn eine Infektion stattfindet, wird dieser Zustand ein wenig gestört. Für $R_0 < 1$ wird die Infektion automatisch eliminiert. Für $R_0 > 1$ kann das Virus im Körper Fuss fassen. Die Linearisierung im anderen stationären Punkt ist

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -dR_0\hat{x} - \frac{au}{k}\hat{v}, \tag{25}$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = d(R_0 - 1)\hat{x} - a\hat{y} + \frac{au}{k}\hat{v}, \tag{26}$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = k\hat{y} - u\hat{v}. \tag{27}$$

Daraus folgt die Eigenwertgleichung

$$\mu^3 + (a + u + dR_0)\mu^2 + dR_0(a+u)\mu + adu(R_0 - 1) = 0. \tag{28}$$

Es ist nur der Fall $R_0 > 1$ von Interesse, da die stationäre Lösung nur dann positiv ist. In diesem Fall sind alle Koeffizienten im Polynom positiv. Um Informationen über die Eigenwerte zu bekommen benutzen wir das Kriterium von Routh und Hurwitz. Für eine Gleichung dritten Grades

$$\mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3 = 0. \tag{29}$$

sagt dieses Kriterium, dass alle Lösungen negativen Realteil haben genau dann wenn $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ und $a_1a_2 - a_3 > 0$. In unserem Beispiel haben also alle Eigenwerte negative Realteile falls

$$(a + u + dR_0)dR_0(a+u) > adu(R_0 - 1). \tag{30}$$

Wenn wir diese Ungleichung ausmultiplizieren und die Terme nach Potenzen von R_0 ordnen, dann bekommen wir

$$d^2(a+u)R_0^2 + R_0[d(a^2 + ad + u^2)] + adu > 0, \tag{31}$$

eine Bedingung, die offenbar gilt. Wenn $R_0 = 1$ sind die Eigenwerte $0, -(a+u)$ and $-d$.

Um Aussagen über Stabilität zu beweisen, werden Ideen benutzt, die auf Ljapunow zurückgehen. Sei $\dot{x} = f(x)$ ein autonomes dynamisches System. Wenn V eine stetig differenzierbare Funktion ist, sei $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$. Durch die Kettenregel ist $\dot{V} = \frac{d}{dt}(V(x(t))$. Eine Funktion, die $\dot{V} \leq 0$ erfüllt heißt Ljapunow-Funktion.

Satz 6 Sei G eine offene Umgebung eines Punktes x_0. Sei f ein Vektorfeld der Klasse C^1 mit $f(x_0) = 0$. Sei V eine stetig differenzierbare Funktion mit $V(x_0) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq x_0$. Wenn $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in G$ dann ist x_0 stabil. Wenn $\dot{V}(x) < 0$ für alle $x \in G$ außer x_0 dann ist x_0 asymptotisch stabil. Wenn $\dot{V}(x) > 0$ für alle $x \in G$ außer x_0 dann ist x_0 instabil.

In dem man geeignete Ljapunow-Funktionen konstruiert kann man Aussagen über die Stabilität von stationären Lösungen beweisen.

Satz 7 Sei $x = x_0$ eine stationäre Lösung des Systems $\dot{x} = f(x)$ und $A = Df(x_0)$. Wenn A einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt, dann ist x_0 instabil. Wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben dann ist x_0 stabil und sogar asymptotisch stabil.

Es folgt aus den soeben formulierten Aussagen, dass für $R_0 > 1$ die stationäre Lösung des fundamentalen Modells der Virusdynamik mit $v > 0$ asymptotisch stabil ist und die Lösung mit $v = 0$ instabil. Dagegen ist für $R_0 < 1$ die Lösung mit $v = 0$, die in diesem Fall die einzige nichtnegative stationäre Lösung ist, stabil. Diese Aussagen betreffen das Verhalten der Lösungen in einer Umgebung der stationären Lösungen. Eine Ljapunow-Funktion kann auch helfen, globale Aussagen zu beweisen. Wenn ein dynamisches System auf einer offenen Teilmenge U definiert ist, und V die Ungleichung $\dot{V} \leq 0$ erfüllt, sind die ω-Limespunkte einer Lösung $x(t)$ in U die in U liegen Punkte wo $\dot{V} = 0$. Die Funktion $V(x(t))$ ist monoton fallend und nichtnegativ. Sie konvergiert also gegen eine Konstante V_∞. Es folgt, dass $V(y) = V_\infty$ für jeden ω-Limespunkt y von $x(t)$. Deshalb ist V auf der ω-Limesmenge konstant. Wenn y ein ω-Limespunkt ist, dann liegt die Lösung mit Anfangswert y in der ω-Limesmenge. Die Funktion V ist längs dieser Lösung konstant und deshalb ist $\dot{V}(y) = 0$. Aus dieser Überlegung folgt, dass wenn $\dot{V} < 0$ auf U dann gibt es keine ω-Limespunkte in U.

Korobeinikov [5] hat Ljapunow-Funktionen benutzt, um das globale qualitative Verhalten der Lösungen des fundamentalen Systems der Virusdynamik zu bestimmen. Er bezeichnet die stationäre Lösung mit $v > 0$ mit (x^*, y^*, v^*) und die stationäre Lösung mit $v = 0$ mit $(x_0, 0, 0)$. Betrachten wir zuerst die Funktion

$$V(x, y, v) = x^* \left(\frac{x}{x^*} - \log \frac{x}{x^*} \right) + y^* \left(\frac{y}{y^*} - \log \frac{y}{y^*} \right) + \frac{a}{k} v^* \left(\frac{v}{v^*} - \log \frac{v}{v^*} \right) \quad (32)$$

Diese Funktion hat ein Minimum im Punkt (x^*, y^*, v^*). Die Ableitung ist

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \left(1 - \frac{x^*}{x}\right)\dot{x} + \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)\dot{y} + \frac{a}{k}\left(1 - \frac{v^*}{v}\right)\dot{v} \qquad (33)\\
&= \lambda - dx - \frac{au}{k}v - \lambda\frac{x^*}{x} + \beta x^* v + dx^*\\
&-\beta xv\frac{y^*}{y} + ay^* - ay\frac{v^*}{v} + \frac{au}{k}v^*\\
&= \lambda + dx^* + ay^* + \frac{au}{k}v^* - dx + \left(\beta x^* - \frac{au}{k}\right)v\\
&-\lambda\frac{x^*}{x} - \beta xv\frac{y^*}{y} - ay\frac{v^*}{v}\\
&= dx^*\left(2 - \frac{x}{x^*} - \frac{x^*}{x}\right) + ay^*\left(3 - \frac{x^*}{x} - \frac{xvy^*}{x^*v^*y} - \frac{yv^*}{y^*v}\right). \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Es kann gezeigt werden, dass $\dot{V} \leq 0$, in dem man die Ungleichung zwischen den arithmetischen und geometrischen Mitteln verwendet. Diese sagt, dass, für positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, $(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$, und dass die Gleichheit nur gilt, wenn alle a_i gleich sind. Es folgt, dass $\dot{V}$ nur Null sein kann, wenn $x = x^*$. Wenn es einen positiven ω-Limespunkt gibt muss $\dot{V} = 0$ dort. Deshalb ist $x = x^*$ auf der ganzen Lösung, die an diesem Punkt startet und $\dot{x} = 0$. Wenn diese Information in die Gleichung für x eingesetzt wird, sieht man, dass v konstant ist. Die Gleichung für v zeigt dann, dass y konstant ist. Wir sehen, dass jeder positive ω-Limespunkt eine stationäre Lösung ist. Es kann nur der Punkt (x^*, y^*, v^*) sein. Andererseits sind ω-Limespunkte, wo eine der Variablen verschwindet unmöglich weil V bei Annäherung eines solchen Punktes gegen $+\infty$ strebt. Deshalb kann es keine ω-Limespunkte außer der stationären Lösung (x^*, y^*, v^*) geben. Damit ist gezeigt, dass im Fall $R_0 > 1$ jede positive Lösung gegen die positive stationäre Lösung konvergiert für $t \to \infty$.

Um den Fall $R_0 \leq 1$ zu verstehen betrachten wir die Funktion

$$
U(x, y, v) = x_0\left(\frac{x}{x_0} - \log\frac{x}{x_0}\right) + y + \frac{a}{k}v. \qquad (35)
$$

Im Bereich wo alle Variablen nicht negativ sind und x positiv hat diese Funktion ein Minimum im Punkt $(x_0, 0, 0)$. Die Ableitung ist

$$
\begin{aligned}
\dot{U} &= \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\dot{x} + \dot{y} + \frac{a}{k}\dot{v}\\
&= \lambda\left(2 - \frac{x}{x_0} - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{au}{k}(R_0 - 1)v. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Diese Größe ist nicht negativ und verschwindet nur wenn $R_0 = 1$ und $x = x_0$. Ein ω-Limespunkt einer positiven Lösung kann nicht $x = 0$ erfüllen, da U gegen unendlich strebtt für $x \to 0$. Wie im Fall $R_0 > 1$ kann man dann argumentieren, dass ein ω-Limespunkt mit $x > 0$ eine stationäre Lösung sein muss. Deshalb konvergiert jede Lösung gegen die eindeutige stationäre Lösung für $t \to \infty$.

Dieses Beispiel zeigt, wie eine Ljapunow-Funktion helfen kann, das asymptotische Verhalten eines dynamischen Systems zu untersuchen. Leider gibt es keine allgemeine Methode, um Ljapunow-Funktionen zu finden. Dabei handelt es sich eher um eine Kunst als eine Wissenschaft. Wie hat Korobeinikov seine Ljapunow-Funktion gefunden? In seiner Arbeit sagt er nicht sehr viel dazu, aber er erwähnt eine Beziehung zu Modellen aus der Epidemiologie. Dieser Spur wollen wir ein wenig nachgehen. Dabei können wir auch mit einigen wichtigen Modellen aus der mathematischen Biologie Bekanntschaft machen. Die Modelle um die es sich handelt wurden von Kermack und McKendrick im Jahr 1927 eingeführt. Betrachten wir eine Population von Menschen (oder Tieren) die einer Infektionskrankrankheit ausgesetzt ist. Sei S der Anteil der Menschen die anfällig sind für die Krankheit (englisch 'susceptible'), I der Anteil die infiziert sind (englisch 'infected' oder 'infectious') und R der Anteil die genesen oder entfernt sind (english 'recovered' oder 'removed'). Dann ist $S + I + R = 1$. Nehmen wir an, dass die Population konstant ist, so dass S, I und R proportional der Zahlen in den verschiedenen Gruppen sind. Im einfachsten Modell sind die Gleichungen

$$\dot{S} = -\beta SI, \tag{37}$$

$$\dot{I} = \beta SI - \alpha I, \tag{38}$$

$$\dot{R} = \alpha I. \tag{39}$$

Dieses Modell ist als SIR-Modell bekannt. Man sieht sofort, dass $S + I + R$ konstant ist. Da wir R aus den anderen Variablen berechnen können, können wir die dritte Gleichung weglassen. In diesem Modell wird angenommen, dass jemand der infiziert ist sofort andere infizieren kann, was nicht sehr realistisch ist für viele Krankheiten. Später werden wir eine andere Alternative kennenlernen. Der Übergang von I zu R kann durch Genesung mit anschließender Immunität passieren, durch räumliche Entfernung (Quarantäne während einer Epidemie) oder durch den Tod. In diesem Modell werden Geburten nicht berücksichtigt und Todesfälle, die nicht durch die Krankheit verursacht werden, auch nicht. Die Vorstellung ist, dass das Modell nur für Zeiträume gültig sein soll, wo diese letzten Effekte keine Rolle spielen. Immunität nach einer Erkrankung entsteht bei der Ansteckung mit vielen Viren, allerdings nicht beim HIV.

Um Lösungen des SIR-Modells zu verstehen, das nunmehr zweidimensional ist, können wir folgendermassen vorgehen. Auf einem Zeitintervall auf dem S monoton ist können wir I als Funktion von S betrachten und die Gleichung

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S} \tag{40}$$

herleiten. In der Tat ist S immer monoton fallend, da $\dot{S} < 0$. Eine Integration zeigt, dass $I + S - \frac{\alpha}{\beta} \log S$ konstant ist längs der Integralkurven. Dadurch sieht man, dass jede Lösung gegen einen Punkt mit $I = 0$ konvergiert für $t \to \infty$. Diese Erhaltungsgröße ist nützlich für die Untersuchung des SIR-Modells. Hier soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass sie eine formale Ähnlichkeit mit der Ljapunow-Funktion hat mit deren Hilfe das fundamentale System der Virus-Dynamik untersucht wurde. analysiert wurde. Im allgemeinen wird die Frage, ob eine Krankheit sich in einer Population behaupten kann, durch einen Parameter R_0 bestimmt. Die Impfung von Kindern kann benutzt werden, um den effektiven Wert von R_0 zu senken und dadurch das Fortschreiten der Krankheit zu bekämpfen. Wenn diese Massnahme zu $R_0 < 1$ führt spricht man von Herdenimmunität. Dieser Zustand ist nicht leicht zu erreichen. Für die Masern schätzt man, dass in den Industrieländern eine Impfrate zwischen 85 und 90 Prozent in ländlichen Gebieten und wesentlich mehr als 90 Prozent in Städten notwendig ist. In Entwicklungsländern sieht es ganz anders aus, da die Masern dort oft tödlich verlaufen.

Die Gleichungen, die hier betrachtet wurden haben auch eine Ähnlichkeit mit den berühmten Lotka-Volterra-Gleichungen für Räuber-Beute-Systeme. In dem Fall sind die Gleichungen

$$\dot{x} = x(\lambda - by) \tag{41}$$

$$\dot{y} = y(-\mu + cx) \tag{42}$$

und es gibt die Erhaltungsgröße

$$cx - \mu \log x + by - \lambda \log y. \tag{43}$$

Hier ist die Interpretation, dass x die Population der Beute ist (z.B. Hasen) und y die Population der Räuber (z. B. Luchse). In diesem Fall sind die Lösungen periodisch.

6 Invariante Mannigfaltigkeiten

Im letzten Abschnitt haben wir Ergebnisse über das Verhalten der Lösungen eines dynamischen Systems in der Nähe einer stationären Lösung unter bestimmten Bedingungen präsentiert. Wenn alle Eigenwerte des linearisierten Systems negativen Realteil haben konvergieren Lösungen, die in der Nähe der stationären Lösung starten gegen die stationäre Lösung für $t \to \infty$. In dem wir t durch $-t$ ersetzen, bekommen wir analoge Ergebnisse im Fall, dass alle Eigenwerte positiven Realteil haben. Wenn die Realteile der Eigenwerte beide Vorzeichen haben, haben wir bisher nur wenige Informationen. In diesem Abschnitt wollen wir mehr erfahren, in dem wir invariante Mannigfaltigkeiten betrachten. Eine invariante Mannigfaltigkeit ist eine Untermannigfaltigkeit die invariant ist unter dem Fluss. In diesem Zusammenhang ist es hilfreich die Einschränkung des Flusses $\phi(t, x)$ für einen festen Wert von t zu betrachten. Es handelt sich dabei um einen lokalen Diffeomorphismus zwischen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Eine invariante Mannigfaltigkeit einer solchen Abbildung ist eine Untermannigfaltigkeit die durch den Diffeomorphismus in sich abgebildet wird.

Für eine reelle Zahl t sei T^t eine stetige Abbildung einer Umgebung G_t des Ursprungs im $\mathbb{R}^m$ auf eine Umgebung des Ursprungs im gleichen Raum mit $T^t(0) = 0$. Eine Menge S heißt invariant bezüglich $\{T^t\}$ wenn $T^t(G_t \cap S) \subset S$

für alle t. Sie heißt lokal invariant wenn es $\epsilon > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass wenn $x \in S$ und $|T^t(x)| < \epsilon$ für $0 \leq t \leq t_0$ dann ist $|T^t(x)| \in S$. Wir betrachten jetzt ein lineares System $\dot{x} = Ax$ und das gestörte System $\dot{x} = Ax + F(x)$, wo F eine stetig differenzierbare Abbildung ist die $o(|x|)$ ist für $x \to 0$. Die zweite Eigenschaft ist damit äquivalent, dass $F(0) = 0$ und $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0) = 0$. Das erste System ist die Linearisierung des zweiten Systems im Ursprung. Wir definieren $T^t(x) = \phi(t, x)$ auf dem Gebiet, wo dieser Ausdruck existiert. Hier ist ϕ der Fluss des nichtlinearen Systems.

Wenn S invariant ist, dann ist der Durchschnitt von S mit einer Kugel lokal invariant. Wenn umgekehrt S lokal invariant ist, dann ist die Vereiningung der Mengen $T^t(S \cap G_t)$ invariant. Es gibt also enge Beziehungen zwischen invarianten und lokal invarianten Mengen. Dies ist aus folgendem Grund nützlich. Wenn man F außerhalb einer kleinen Kugel verändert und eine invariante Menge für die neue Gleichung findet, dann bekommt man eine lokal invariante Menge für die ursprüngliche Gleichung. Ein anderer Vorteil von lokal invarianten Mengen ist, dass man erwarten kann, dass sie einfacher sind als global invariante Mengen. Zum Beispiel kann es Lösungen geben, die für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ gegen den Ursprung konvergieren und dazwischen schleifen bilden.

Nehmen wir an, dass die Jacobi-Matrix in der Form $A = P \oplus Q$ geschrieben werden kann, wo die Eigenwerte p_j von P die Ungleichung Re $p_j \leq \alpha < 0$ erfüllen und die Eigenwerte q_k von Q die Ungleichung Re $q_k \geq \beta > \alpha$. Koordinaten in den Teilräumen, die dieser Zerlegung entsprechen, werden mit y_j und z_k bezeichnet. Der Teilraum wo die Koordinaten z_k verschwinden ist die Vereinigung aller Lösungen des linearisierten Systems, deren Abstand zum Ursprung für t groß durch $e^{(\beta-\epsilon)t}$ beschränkt ist für ein $\epsilon > 0$. Es stellt sich die Frage, ob eine ähnliche Aussage für ein nichtlineares System gilt. Wir betrachten ein System

$$\dot{y} = Py + F_1(y, z), \quad \dot{z} = Qy + F_2(y, z) \tag{44}$$

wo $F = (F_1, F_2)$ die gleichen Eigenschaften hat wie vorher. Gibt es eine lokal invariante Mannigfaltigkeit S von der Form $z = g(y)$ die aus allen Lösungen besteht, die für t groß durch $e^{(\beta-\epsilon)t}$ beschränkt sind für ein $\epsilon > 0$? Die Antwort auf diese Frage ist positiv.

Die Lösung mit Anfangswert Null is identisch Null und existiert global in der Zeit. Deshalb ist es so dass für beliebig kleine Anfangswerte die Lösung beliebig lang existiert. Die Identität $T^{t_1+t_2} = T^{t_1}T^{t_2}$ gilt wo immer beide Seiten definiert sind. Diese Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass die Lösungen eindeutig durch ihre Anfangsdaten bestimmt sind. Der Fluss ϕ ist C^1 und seine Jacobi-Matrix $H(t, x)$ bezüglich x_0 erfüllt nach (12) die lineare Gleichung

$$\dot{H}(t, x) = \left[A + \frac{\partial F}{\partial x} \right] H(t, x), \quad H(0, x) = I. \tag{45}$$

Insbesondere gelten $\dot{H}(t, 0) = AH(t, 0)$ und $H(0, 0) = I$. Deshalb ist $H(t, 0) = e^{At}$. Es folgt, dass

$$\phi(t, x) = e^{At}x + \Xi(t, x), \tag{46}$$

wo

$$\Xi(t,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Xi}{\partial x}(t,0) = 0. \tag{47}$$

Es können bei der Konstruktion einer invarianten Mannigfaltigkeit technische Schwierigkeiten dadurch auftreten, dass die Lösungen nicht global in der Zeit definiert sind. Um dem vorzubeugen ersetzen wir die Funktion F durch eine andere die mit F identisch ist für x klein, z. B. für $|x| \leq \frac{1}{2}s$, und für $|x| \geq s$ verschwindet. Wenn wir die neue Funktion auch mit F bezeichnen dann ist der Fluss unserer Gleichung global definiert. Dann ist die Schar T^t eine Gruppe.

Hilfssatz 4 Sei $F(x)$ eine vektorwertige Funktion der Klasse C^1, die für $|x|$ klein definiert ist und $F(0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x}(0) = 0$ erfüllt. Sei $\theta > 0$ beliebig. Dann existiert eine Zahl $s = s(\theta) > 0$ (die mit θ gegen Null strebt) und eine Funktion $G(x)$ der Klasse C^1 die für alle x definiert ist mit den Eigenschaften, dass $G(x) = F(x)$ für $|x| \leq \frac{1}{2}s$, $G(x) = 0$ für $|x| \geq s$ und $\|\frac{\partial G}{\partial x}\| \leq \theta$ für alle x.

Auf Grund dieser Aussage ist es so, dass wenn man Lösungen in der Nähe des Ursprungs betrachtet man o.B.d.A. annehmen kann, dass F global definiert und C^1 ist, $\|\partial F/\partial x\| \leq \theta$ für alle x und $F(x) = 0$ für $|x| \geq s$. Hier darf s von θ abhängen.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass es $s_0 = s_0(s,\theta) > 0$ gibt und $\theta_0 = \theta_0(s,\theta)$ so dass s_0 und θ_0 gegen Null streben wenn s und θ es tun und dass wenn ϕ wie in (46) geschrieben wird

$$\Xi(t,x_0) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1,\ |x_0| \geq s_0 \tag{48}$$

$$\|\partial \Xi/\partial x_0(t,x_0)\| \leq \theta_0, \qquad 0 \leq t \leq 1, x_0 \text{ beliebig.} \tag{49}$$

Um dies zu beweisen kann man zunächst die Tatsache verwenden, dass die Bedingung an der Ableitung von F impliziert, dass $|F(x)| \leq \theta|x|$ und dass deshalb die Lösung der Differentialgleichung $|\dot{x}| \leq c_0|x|$ erfüllt, wo $c_0 = \|A\| + \theta$. Deshalb ist

$$\frac{d}{dt}(e^{2c_0t}|x(t)|^2) \geq 0 \tag{50}$$

und $|x(t)| \geq |x_0|e^{-c_0t}$. Wenn also $s_0 = se^{c_0}$ und $|x_0| \geq s_0$ dann ist $|x(t)| \geq s$ für $0 \leq t \leq 1$. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung auf dem Intervall $[0,1]$ auf $\dot{x} = Ax$. Die Lösung mit $x(0) = x_0$ ist also $x(t) = e^{At}x_0$. Deshalb ist $\Xi(t,x_0) = 0$ für $0 \leq t \leq 1$ und $|x_0| \geq s_0$.

Die Beziehung $\Xi(t,x_0) = \phi(t,x_0) - e^{At}x_0$ impliziert, dass $\frac{\partial \Xi}{\partial x_0} = H(t,x_0) - e^{At}$ oder

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x_0} = e^{At}[K(t,x_0) - I], \tag{51}$$

wo $K(t,x_0) = e^{-At}H(t,x_0)$. Die Ableitung von K ist

$$\dot{K} = e^{-At}(\dot{H} - AH) = e^{-At}\frac{\partial \phi}{\partial x_0}e^{At}K. \tag{52}$$

Außerdem is $K(0,x_0) = I$. Die Größe $\|e^{-At}(\partial\phi/\partial x_0)e^{At}\|$ ist durch $c_1\theta$ beschränkt, wo $c_1 = (e^{\|A\|})^2$. Deshalb kann $\|K(t,x_0)\|$ durch $e^{c_1\theta}$ beschränkt werden für

$0 \leq t \leq 1$. Es folgt, dass $\|\dot{K}(t, x_0)\| \leq c_1\theta e^{c_1\theta}$ und dass $\|K(t, x_0) - I\| \leq c_1\theta e^{c_1\theta}$ für $0 \leq t \leq 1$. Die Ungleichungen führen auf

$$\|\partial\Xi/\partial x_0\| \leq e^{\|A\|}c_1\theta e^{c_1\theta}. \tag{53}$$

Damit haben wir die gewünschte Bedingung mit $\theta_0 = e^{\|A\|}c_1\theta e^{c_1\theta}$.

Jetzt betrachten wir wieder das System (44). Sei $B = e^P$ und $C = e^Q$. Die Eigenwerte der Matrizen B bzw. C sind e^{p_j} bzw. e^{q_k}. Die Normen von B bzw. C^{-1} können durch $e^{\alpha+\epsilon}$ bzw. $e^{-\beta+\epsilon}$ beschränkt werden. Um dies zu sehen benutzt man die Tatsache, dass es sich um die Lösungen von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen handelt. Wir nehmen an, dass ϵ so klein ist, dass $b = \|B\|$ und $1/c = \|C^{-1}\|$ die Ungleichungen $b < c$ und $b < 1$ erfüllen. Es wird angenommen, dass die Funktionen F_1 und F_2 stetig differenzierbar sind, dass F_1, F_2 und ihre Ableitungen erster Ordnung im Ursprung verschwinden und dass die Normen dieser Ableitungen nicht größer sind als θ für alle x. Außerdem wird angenommen, dass F_1 und F_2 für $|x|^2 \geq s^2 > 0$ verschwinden. Dann definiert der Fluss für jeden Wert von t eine Abbildung T^t von (y_0, z_0) auf (y, z) der Form

$$y(t, y_0, z_0) = e^{Pt}y_0 + Y(t, y_0, z_0), \tag{54}$$

$$z(t, y_0, z_0) = e^{Qt}z_0 + Z(t, y_0, z_0) \tag{55}$$

wo Y, Z und ihre Ableitungen erster Ordnung im Ursprung verschwinden, die Normen der ersten Ableitungen nicht größer sind als θ_0 für $0 \leq t \leq 1$ und Y und Z verschwinden für $|y|^2 + |z|^2 \geq s_0^2$ und $0 \leq t \leq 1$.

Jetzt wird ein Ergebnis über invariante Mannigfaltigkeiten einer Abbildung formuliert. Es wird dann auf T^t mit $t = 1$ angewendet um eine Aussage für invariante Mannigfaltigkeiten eines Flusses zu bekommen.

Hilfssatz 5 Sei B und C Matrizen mit den Eigenschaften, die oben aufgeführt wurden. Sei T eine Abbildung von (y_0, z_0) auf (y_1, z_1) mit

$$y_1 = By_0 + Y(y_0, z_0), \tag{56}$$

$$z_1 = Cz_0 + Z(y_0, z_0) \tag{57}$$

wo Y und Z stetig differenzierbar sind und die oben aufgeführten Bedingungen erfüllen. Dann existiert eine stetig differenzierbare Abbildung $z = g(y)$ mit $g(0) = 0$, $(\partial g/\partial y)(0) = 0$ so dass die Abbildung R mit

$$R(y, z) = (u, v) = (y, z - g(y)) \tag{58}$$

folgende Eigenschaften besitzt. Die Abbildung RTR^{-1}, die (u_0, v_0) auf (u_1, v_1) abbildet ist von der Form

$$u_1 = Bu_0 + U(u_0, v_0), \tag{59}$$

$$v_1 = Cv_0 + V(u_0, v_0) \tag{60}$$

wobei U, V und ihre Ableitungen erster Ordnung im Ursprung verschwinden und $V(u_0, 0) = 0$. Die letzte Bedingung bedeutet, dass der Teilraum $v_0 = 0$ unter der Abbildung RTR^{-1} invariant ist und dass die Mannigfaltigkeit $z = g(y)$ lokal invariant bezüglich T ist. Wenn wir die Reduktion ausführen, bekommen wir eine global invariante Mannigfaltigkeit für das transformierte System. Es kann angenommen werden, dass $\theta_0 < \min\left(\frac{c-b}{4}, \frac{1-b}{2}\right)$.

Es gibt entsprechende Aussagen wenn C^1 mit C^r ersetzt wird, r endlich oder unendlich.

Korollar 1 Seien T, $g(y)$ und θ_0 wie im Hilfssatz. Für (y_0, z_0) gegeben definieren wir eine Folge rekursiv durch $(y_{n+1}, z_{n+1}) = T(y_n, z_n)$. Wenn $z_0 = g(y_0)$ dann gilt $\|(y_n, z_n)\| = O((b + \theta_0)^n)$ für $n \to \infty$. Es ist auch so, dass wenn $y_0 \neq 0$ dann ist $y_n \neq 0$ für alle n, $\|z_n\|/\|y_n\| \to 0$ und $\limsup n^{-1} \log \|(y_n, z_n)\| \leq \alpha$. Wenn $z_0 \neq g(y_0)$ dann gilt $(c - 2\theta_0)^n = O(\|(y_n, z_n)\|)$ für $n \to \infty$.

Wenn $c > 1$, so dass $b < 1 < c$ kann man die Punkte (y_0, z_0) der Mannigfaltigkeit $z = g(y)$ durch drei alternative Bedingungen an den Punkten charakterisieren. Die erste Bedingung ist dass, mit $(y_n, z_n) = T^n((y_0, z_0))$, $\|(y_n, z_n)\|$ exponentiell gegen Null konvergiert für $n \to \infty$. Die zweite ist, dass sie gegen Null konvergiert für $n \to \infty$. Die dritte ist, dass sie in einer Umgebung von $(0, 0)$ bleibt. In diesem Fall heißt die Mannigfaltigkeit $z = g(y)$ stabile Mannigfaltigkeit von T. Die entsprechende Mannigfaltigkeit wenn man n durch $-n$ ersetzt heißt instabile Mannigfaltigkeit von T.

Satz 7 Sei T eine Abbildung einer Umgebung des Ursprungs im $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ der Form

$$x_1 = T(x_0) = \Gamma x_0 + \Xi(x_0), \tag{61}$$

wo Ξ stetig differenzierbar ist, $\Xi(0) = 0$, $\partial\Xi/\partial x_0(0) = 0$ und Γ eine Matrix ist mit d bzw. e_0 bzw. e Eigenwerten, die betragsmässig < 1 bzw. $= 1$ bzw. > 1 sind. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung R mit nichtverschwindender Jacobi-Determinante so dass RTR^{-1} folgende Form hat

$$\begin{aligned} u_1 &= Au_0 + U(u_0.v_0, w_0), \\ w_1 &= Bw_0 + W(u_0.v_0, w_0), \\ v_1 &= Cv_0 + V(u_0.v_0, w_0). \end{aligned} \tag{62}$$

Hier sind A bzw. B bzw. C Matrizen die $d \times d$ bzw. $e_0 \times e_0$ bzw. $e \times e$ sind und deren Eigenwerte betragsmässig < 1 bzw. $= 1$ bzw. > 1 sind. U, V und W und ihre Ableitungen erster Ordnung verschwinden im Ursprung und

$$V = 0, W = 0 \quad \text{wenn} \quad v_0 = 0, w_0 = 0 \tag{63}$$

$$U = 0, W = 0 \quad \text{wenn} \quad u_0 = 0, w_0 = 0. \tag{64}$$

Diese Gleichungen bedeuten, dass die Ebenen $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ bzw. $u_0 = 0$, $w_0 = 0$ invariante Ebenen der Dimension d bzw. e sind. Wenn $e_0 = 0$ dann fehlen die Variablen w_0 und w_1.

Beweis Der Hilfssatz 5 liefert eine Abbildung R_0, so dass nach der Transformation mit R_0 die erste Bedingung erfüllt ist. Wenn wir die Abbildung T^{-1}

betrachten, dann liefert der Hilfssatz 5 eine Abbildung R_1, so dass nach der Transformation mit R_1 beide Bedingungen erfüllt sind.

Korollar 2 Sei T^t eine Gruppe von Abbildungen, die durch die Gleichungen (54)-(55) definiert ist. Sei g die Funktion aus dem Hilfssatz 5 mit $T = T^1$. Dann hat RT^tR^{-1} die Form

$$u(t, u_0, v_0) = e^{Pt}u_0 + U(t, u_0, v_0), \tag{65}$$

$$v(t, u_0, v_0) = e^{Qt}u_0 + V(t, u_0, v_0), \tag{66}$$

wobei $V(t, u_0, 0) = 0$ für alle t und u_0. Außerdem gilt, dass wenn $y_0 \neq 0$ und $z_0 = g(y_0)$ dann ist $z(t) = g(y(t))$ für alle t, $y(t) \neq 0$ für alle t, $\|z(t)\|/\|y(t)\| \to 0$ und $\limsup t^{-1} \log \|y(t)\| \leq \alpha$ für $t \to \infty$. Wenn $z_0 \neq g(y_0)$ dann gilt $(c-2\theta_0)^t = O(\|(y(t), z(t))\|)$ für $t \to \infty$.

Nachdem wir die Existenz von invarianten Mannigfaltigkeiten für Abbildungen gezeigt haben, können wir zu den Differentialgleichungen zurückkehren.

Satz 8 Im dynamischen System

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{67}$$

sei F stetig differenzierbar, $F(0) = 0$ und $\partial F/\partial x(0) = 0$. Nehmen wir an, dass es r Eigenwerte von A gibt mit negativen Realteilen $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r < 0$ und dass die anderen Eigenwerte, falls vorhanden, nicht-negative Realteile haben. Sei d die Summe der Dimensionen d_i der Räume der verallgemeinerten Eigenvektoren die den Eigenwerten mit Realteilen α_i entsprechen. Wenn $0 < \epsilon < -\alpha_r$ dann gibt es Lösungen, die die Bedingung $\|x(t)\|e^{\epsilon t} \to 0$ für $t \to \infty$ erfüllen und jede solche Lösung erfüllt $\lim t^{-1} \log \|x(t)\| = \alpha_i$ für ein bestimmtes i. Für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ bilden der Punkt $x = 0$ und die Menge der Punkte x auf Lösungen $x(t)$ mit $\lim t^{-1} \log \|x(t)\| \leq \alpha_i$ für i fest eine stetig differenzierbare lokal invariante Mannigfaltigkeit der Dimension $d_1 + \ldots + d_i$. Die entsprechende Menge, die durch die Bedingung $\limsup t^{-1} \log \|x(t)\| < 0$ definiert wird ist eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension d.

Beweis Wenn lim durch lim sup ersetzt wird, dann folgt der letzte Teil des Satzes aus Korollar 2. Außerdem folgt, dass für $t \to \infty$ die Bedingung $\liminf t^{-1} \log \|x(t)\| < \alpha_{i+1}$ die Bedingung $\limsup t^{-1} \log \|x(t)\| \leq \alpha_i$ impliziert, wobei α_{r+1} als Null interpretiert wird. Deshalb impliziert die Bedingung, dass $\limsup t^{-1} \log \|x(t)\| = \alpha_i$, dass $\liminf = \limsup$.

Man bekommt ähnliche Ergebnisse in dem man t durch $-t$ ersetzt. Die Argumente, die in den Beweisen von Satz 8 und Korollar 2 angewendet werden liefern

Satz 9 Seien A und F wie im letzten Satz. Es existieren außerdem noch e Eigenwerte von A mit positivem Realteil. Sei $x(t)$ die Lösung des Systems mit $x(0) = x_0$ und T^t die entsprechende Abbildung. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt eine Abbildung R mit nichtverschwindender Jacobi-Determinante so dass RT^tR^{-1}

folgende Form hat.

$$u(t) = e^{Pt}u_0 + U(u_0, v_0, w_0), \tag{68}$$
$$w(t) = e^{P_0 t}w_0 + W(u_0, v_0, w_0), \tag{69}$$
$$v(t) = e^{Qt}v_0 + V(u_0, v_0, w_0). \tag{70}$$

U, V und W und ihre Ableitungen erster Ordnung verschwinden im Ursprung. Wenn $v_0 = w_0 = 0$ dann ist $V = W = 0$ und wenn $u_0 = w_0 = 0$ dann ist $U = W = 0$. Außerdem ist $\|e^P\| < 1$, $\|e^{-Q}\| < 1$ und die Eigenwerte von e^{P_0} haben Betrag Eins. Die Abbildung R transformiert die Gleichung für x in die Gleichung

$$\dot{u} = Pu + F_1(u, v, w), \tag{71}$$
$$\dot{w} = P_0 w + F_2(u, v, w), \tag{72}$$
$$\dot{v} = Qv + F_3(u, v, w), \tag{73}$$

wobei die F_i nicht C^1 sein müssen. Die Ebenen $v_0 = w_0 = 0$ und $u_0 = w_0 = 0$ sind lokal invariante Mannigfaltigkeiten und heißen stabile und instabile Mannigfaltigkeiten. Im Fall dass A keine Eigenwerte mit Realteil Null werden sie durch die Bedingungen charakterisiert, dass sie aus den Lösungen bestehen, die für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ gegen den Ursprung konvergieren.

Um diese allgemeinen Ideen zu illustrieren können wir das fundamentale Modell der Virus-Dynamik mit $R_0 \neq 1$ betrachten. Der einzige Fall in diesem Beispiel wo eine stationäre Lösung Eigenwerte hat, deren Realteile beide Vorzeichen haben ist die Lösung mit $v = 0$ im Fall $R_0 > 1$. Dort ist die stabile Mannigfaltigkeit zweidimensional und die instabile eindimensional. Die Gerade $v = y = 0$ ist invariant und liegt in der stabilen Mannigfaltigkeit. Die stabile Mannigfaltigkeit kann den positiven Bereich nicht treffen, wegen dem Satz von Korobeinikov. Um etwas über die instabile Mannigfaltigkeit in diesem Fall zu verstehen, betrachten wir den positiven Eigenwert der Linearisierung, nennen wir ihn μ_+. Sei $(\hat{x}, \hat{y}, 1)$ die Komponenten eines entsprechenden Eigenvektors. Dann gelten die Beziehungen $\hat{y} = \frac{\beta x}{\mu_+ + a}$ und $\hat{x} = -\frac{\beta x}{\mu_+ + d}$. Weil die zweite und dritte Komponenten des Vektors positiv sind ist es geometrisch klar, dass die eine Hälfte der instabilen Mannigfaltigkeit im positiven Bereich liegt.

7 Zentrumsmannigfaltigkeiten

Im letzten Abschnitt wurde die Existenz von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Beide haben äquivalente Eigenschaften und deshalb konzentrieren wir uns hier auf den Fall der stabilen Mannigfaltigkeit. Es handelt sich um eine invariante Mannigfaltigkeit durch eine stationäre Lösung x_0, deren Tangentenraum in x_0 mit dem stabilen Teilraum in diesem Punkt übereinstimmt. Durch diese Eigenschaften ist sie in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 eindeutig bestimmt. Wenn das System C^k für eine natürliche Zahl $k \geq 1$ dann ist die Mannigfaltigkeit C^k. Wenn das System C^∞ bzw. analytisch ist, ist die Mannigfaltigkeit C^∞ bzw. analytisch.

Angesichts dieser Tatsachen kann man Fragen, ob es für den Zentrumsteilraum V_c auch ein Analogon der stabilen Mannigfaltigkeit gibt. Mit anderen Worten, gibt es eine invariante Mannigfaltigkeit M_c durch x_0 deren Tangentenraum mit V_c übereinstimmt? Es gibt in der Tat eine solche Mannigfaltigkeit, die Zentrumsmannigfaltigkeit. Es würde zu weit führen, wenn wir diese Aussage in dieser Vorlesung beweisen würden. Stattdessen begrenzen wir uns darauf, Aussagen über solche Mannigfaltigkeiten zu formulieren und zu zeigen wie die Existenzaussage in konkreten Anwendungen nützlich sein kein. Weitere Informationen über Zentrumsmannigfaltigkeiten findet man in [1].

Wenn x_0 eine stationäre Lösung eines dynamischen Systems ist, und V_c nicht trivial ist, dann gibt es eine Zentrumsmannigfaltigkeit. Sie muss aber keineswegs eindeutig sein, wie man schon bei folgendem einfachen System sieht.

$$\dot{x} = -x, \tag{74}$$
$$\dot{y} = y^2. \tag{75}$$

Der Ursprung ist eine stationäre Lösung. Der Zentrumsteilraum ist die Menge $x = 0$ und sie ist auch eine Zentrumsmannigfaltigkeit in diesem Fall, aber nicht die einzige. Alle Lösungen dieser Gleichung außer der stationären Lösung werden durch $x = ae^{-t}$, $y = -1/(t+b)$ gegeben. Wenn wir für y als Funktion von x auflösen, dann bekommen wir $x = Ce^{1/y}$. Für $y > 0$ gibt es invariante Mannigfaltigkeiten die in jeder Ordnung tangential zum Zentrumsteilraum sind. Es ist in der Tat so, dass obwohl M_c nicht eindeutig ist, die Ableitungen im Punkt x_0 immer eindeutig bestimmt sind. Wenn das Systen C^k ist, mit k endlich, dann gibt es auch eine Zentrumsmannigfaltigkeit, die C^k ist. Wenn das System C^∞ ist, dann gibt es nicht immer eine Zentrumsmannigfaltigkeit, die C^∞ ist, obwohl es solche gibt, die C^k sind für jeden festen Wert von k. Für ein analytisches System gibt es nicht immer eine analytische Zentrumsmannigfaltigkeit.

Wie kann es sein, dass eine Zentrumsmannigfaltigkeit in Anwendungen nützlich sein kann, wenn man sie nicht explizit kennt und wenn sie nicht einmal eindeutig ist? Wie wir später sehen werden bestimmt die Dynamik der Einschränkung des Systems auf eine Zentrumsmannigfaltigkeit die ganze Dynamik in der Nähe der stationären Lösung. Außerdem kann man manchmal die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit bestimmen, ohne diese Mannigfaltigkeit zu kennen.

Als erstes Beispiel betrachten wir das System

$$\dot{x} = xy + ax^3, \tag{76}$$
$$\dot{y} = -y + cx^2. \tag{77}$$

Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist von der Form $y = \phi(x)$, wobei $\phi(x) = O(x^2)$. Aus der Gleichung $\dot{y} = \phi'(x)\dot{x} = O(x^3)$ folgt, dass auf der Zentrumsmannigfaltigkeit $y = cx^2 + O(x^3)$. Dann ist aber $\dot{x} = (a + c)x^3 + O(x^4)$. Für $a + c > 0$ ist der Ursprung instabil. Für $a + c < 0$ nimmt x entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit ab. Wir werden später sehen, dass in diesem Fall die asymptotische Stabilität des Ursprungs folgt.

Im Falle des fundamentalen Modells der Virusdynamik mit $R_0 = 1$ hat die stationäre Lösung im Punkt $(\lambda/d, 0, 0)$ eine eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit. Der Tangentenraum zu dieser Mannigfaltigkeit in diesem Punkt wird durch den Vektor $(-au, du, dk)$ aufgespannt. Entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit haben wir

$$x = \frac{\lambda}{d} - \frac{au}{dk}v + \psi_1(v), \tag{78}$$

$$y = \frac{u}{k}v + \psi_2(v). \tag{79}$$

Die Funktionen ψ_1 und ψ_2 sind $O(v^2)$. Wenn wir die Gleichung für y differenzieren bekommen wir $\dot{y} = \left(\frac{u}{k} + \psi_2'\right)\dot{v} = u\psi_2 + O(v^3)$. Auf der anderen Seite liefert die Evolutionsgleichung für y

$$\dot{y} = -\frac{\beta au}{dk}v^2 - a\psi_2 + O(v^3). \tag{80}$$

Deshalb ist $\psi_2(v) = -\frac{\beta au}{(a+u)dk}v^2 + O(v^3)$ und v nimmt entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit ab. Wie im letzten Beispiel kann man daraus die asymptotische Stabilität der stationären Lösung schließen.

8 Der Satz von Grobman und Hartman

Eine stationäre Lösung eines dynamischen Systems wo die Linearisierung keine rein imaginären Eigenwerte besitzt heißt *hyperbolisch*. Der Satz 9 zeigt, dass man ein System in der Nähe einer hyperbolischen stationären Lösung durch eine Transformation vereinfachen kann, so dass sie mehr wie das linearisierte System aussieht. Kann aber ein System in dieser Situation durch eine Transformation gänzlich linear gemacht werden? Betrachten wir das System

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{81}$$

im Fall, dass kein Eigenwert von A verschwindenden Realteil hat. Gibt es einen lokalen Diffeomorphismus R der Klasse C^1 so dass $y = R(x)$ die Gleichung $\dot{y} = Ay$ erfüllt? Im allgemeinen ist die Antwort auf diese Frage negativ, schon im zweidimensionalen Fall. Diese Aussage wird hier nicht bewiesen. Wenn man aber anstatt einer stetig differenzierbaren nur eine stetige Abbildung R verlangt, dann sieht es besser aus. Es gilt nämlich folgender Satz

Satz (Grobman-Hartman) Nehmen wir an, dass im System (81) die Matrix A keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil besitzt, und dass F stetig differenzierbar ist, mit $F(0) = 0$ und $\partial F/\partial x(0) = 0$. Seien ϕ bzw. ψ die Flüsse von (81) bzw. des Systems $\dot{y} = Ay$. Dann gibt es eine stetige injektive Abbildung R einer Umgebung von $x = 0$ in den $\mathbb{R}^m$, so dass $R(\phi(t, x_0)) = \psi(t, R(x_0))$ für x_0 in einer Umgebung des Ursprungs und t klein. Inbesondere bildet R Lösungen auf Lösungen, wobei die Parametrisierung behalten wird. Die Systeme sind also topologisch konjugiert.

Die entsprechende Aussage gilt nicht immer wenn es rein imaginäre Eigenwerte gibt. Eine Verallgemeinerung auf diesen Fall wird später vorgestellt. Die

Schwierigkeiten die es gibt, wenn man im Satz von Grobman und Hartman die stetige Abbildung durch eine Abbildung höherer Differenzierbarkeit ersetzen will haben mit dem Phänomen der Resonanzen zu tun. Um diesen Punkt zu illustrieren betrachten wir das einfache System

$$\dot{x} = -x, \tag{82}$$

$$\dot{y} = -2y + x^2. \tag{83}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems ist

$$x(t) = ae^{-t}, \tag{84}$$

$$y(t) = a^2te^{-2t} + be^{-2t}. \tag{85}$$

Wenn es einen C^2-Diffeomorphismus gäbe, der die Lösung des linearisierten Systems in die Lösung des nichtlinearen Systems transformieren würde, dann wäre die Lösung des nichtlinearen Systems von der Form

$$x(t) = ae^{-t} + be^{-2t} + o(e^{-2t}), \tag{86}$$

$$y(t) = ce^{-2t} + o(e^{-2t}). \tag{87}$$

Dies ist aber nicht der Fall. Das Problem hier ist, dass der Exponent der auf der rechten Seite der zweiten Gleichung entsteht, wenn der Ausdruck für x eingesetzt wird gleich dem Koeffizienten -2 auf der linken Seite ist. Im allgemeinen kann es Probleme geben, wenn ein Eigenwert als Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten von anderen geschrieben werden kann. Es gibt einen Satz von Sternberg der besagt, dass wenn die Koeffizienten des Systems C^∞ sind und es keine Resonanzen gibt die Abbildung im Satz von Grobman und Hartman auch C^∞ gewählt werden kann. Eine entsprechende Aussage im analytischen Fall (mit gewissen zusätzlichen Annahmen) wurde schon 1879 von Poincaré bewiesen.

Sei x_0 eine hyperbolische stationäre Lösung, wo m_+ Eigenwerte der Linearisierung A positiven Realteil haben und m_- negativen Realteil. Das System $\dot{x} = Ax$ ist dann das Modell für das nichtlineare System, wenn wir topologische äquivalente Systeme betrachten. Man kann aber noch fragen, wann lineare Systeme einander topologisch äquivalent sind. Es stellt sich heraus, dass dies der Fall ist, wenn sie die gleichen Werte von m_+ und m_- haben. Wir können also als Modell den *Standardsattel* nehmen, der definiert ist durch $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ für $x \in \mathbb{R}^{m_+}$ und $y \in \mathbb{R}^{m_-}$. Diese Aussage wird hier nicht bewiesen, aber man kann die zentrale Idee verstehen im Fall der 2×2-Matrix $-I$ und einer Matrix mit Eigenwerten $-1 \pm i$. In einem Fall sind die Lösungskurven radial und im anderen Fall sind sie spiralförmig. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Spiralen durch einen Homöomorphismus der verschiedenen Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung verschieden rotiert gerade gedreht werden können. Weitere Informationen zu diesem Thema findet man in [7], Kapitel 2.

Mit dem Satz von Grobman und Hartman und das Ergebnis über lineare System, das gerade erwähnt wurde kann man schließen, dass in der Nähe einer hyperbolischen stationären Lösung ein dynamisches System immer mit einem Standardsattel topologisch äquivalent ist. Der Fall, wo alle Eigenwerte positiven Realteil haben heißt hyperbolische Quelle und der Fall wo alle Eigenwerte negativen Realteil haben heißt hyperbolische Senke. Eine Quelle x_0 kann nie ω-Limespunkt einer anderen Lösung sein. Jede Lösung, die nahe genug bei x_0 startet konvergiert gegen x_0 für $t \to -\infty$. Es gibt entsprechende Aussagen für eine Senke. Sei jetzt x_0 eine hyperbolische stationäre Lösung, die weder Quelle noch Senke ist. Wenn x_0 in der ω-Limesmenge einer Lösung $x(t)$, dann hat $x(t)$ auch ω-Limespunkte auf den stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von x_0. Für eine allgemeine stationäre Lösung haben wir

Satz (Shoshitaishvili) Sei x_0 eine stationäre Lösung eines dynamischen Systems. Dann ist das System in der Nähe von x_0 topologisch äquivalent mit dem Produkt der Einschränkung des Systems auf eine Zentrumsmannigfaltigkeit von x_0 mit einem Standardsattel.

Es folgt insbesondere, dass die Einschränkungen des Systems auf zwei verschiedene Zentrumsmannigfaltigkeiten von x_0 topologisch äquivalent sind. Deshalb ist die fehlende Eindeutigkeit der Zentrumsmannigfaltigkeit kein Problem. Mit diesem Satz kann man die Aussagen über asymptotische Stabilität beweisen, die wir bei der Betrachtung der Beispiele für Zentrumsmannigfaltigkeiten erwähnt haben. Es gibt einen Satz von Takens, der eine gemeinsame Verallgemeinerung der Sätze von Sternberg und Shoshitaishvili ist. Wenn bei einer stationären Lösung die nicht hyperbolisch sein muss es in einem geeigneten Sinne keine Resonanzen gibt, gilt ein Analogon des Satzes von Sternberg.

9 Theorie von Poincaré-Bendixson

Nachdem wir lange das lokale Verhalten von Lösungen in der Nähe einer stationären Lösung besprochen haben, wenden wir uns jetzt globalen Eigenschaften zu. Eindimensionale dynamische Systeme sind leicht zu analysieren. Systeme deren Dimension mindestens drei ist können große Schwierigkeiten bergen. Typische Themen sind Chaos und seltsame Attraktoren. Dazwischen gibt es die Dimension zwei, die auf Grund der Theorie von Poincaré-Bendixson relativ gut beherrschbar ist. Diese Theorie ist das Hauptthema dieses Abschnitts aber bevor wir dazu kommen machen wir ein paar Bemerkungen über den eindimensionalen Fall. Dabei geht es um das System $\dot{x} = f(x)$, wo x eine skalare Größe ist. Die stationären Lösungen sind die Nullstellen von f. Die Menge auf der f ungleich Null ist, ist eine Vereinigung von offenen Intervallen U_i. Auf U_i mit i fest ist jede Lösung strikt monoton. Sei U_i das Intervall (x_-, x_+), wo die Endpunkte unendlich sein dürfen. In jeder Zeitrichtung muss die Lösung gegen einen Grenzwert streben (endlich oder unendlich) und dieser Grenzwert kann nur ein Endpunkt des Intervalls sein. Nehmen wir an, dass die Lösung monoton steigend ist. Dann gibt es nur drei Möglichkeiten für die Asymptotik in der Zukunft. Die Lösung strebt nach endlicher Zeit gegen unendlich, die Lösung existiert global in der Zukunft und strebt gegen unendlich für $t \to \infty$ oder die Lösung existiert global und strebt gegen $x_+ < \infty$ für $t \to \infty$. Für monoton fallende Lösungen gibt es entsprechende Möglichkeiten. Die ω-Limesmenge einer beschränkten Lösung ist immer eine stationäre Lösung. Nehmen wir an, dass ein System auf einem Intervall I definiert ist, dass es zwei stabile stationäre Lösungen x_1 und x_2 gibt mit $x_1 < x_2$ und dass f auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ nicht identisch Null ist. Dann gibt es eine instabile stationäre Lösung x_3 mit $x_1 < x_3 < x_2$, wie man folgendermassen beweisen kann. Es gibt einen Punkt $x_4 \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_4) \neq 0$. Wir dürfen annehmen, dass $f(x_4) > 0$ weil wir sonst x durch $-x$ ersetzen könnten. Sei (x_5, x_6) das maximale offene Intervall um x_4 auf dem f positiv ist. Dann können wir $x_3 = x_5$ setzen.

Jetzt kommen wir zu zweidimensionalen Systemen. Hier ist ein zentrales Hilfssmittel der Jordansche Kurvensatz. Eine Jordankurve ist die Menge der Punkte x in der Ebene der Form $x = x(t)$, $a \leq x \leq b$, wo $x(t)$ stetig ist, $x(a) = x(b)$ und $x(s) \neq x(t)$ für $a \leq s < t \leq b$.

Satz (Jordanscher Kurvensatz) Wenn J eine Jordankurve ist, dann ist ihr Komplement in der Ebene die Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen E_1 und E_2, mit $\partial E_1 = \partial E_2 = J$. Eines dieser Gebiete ist beschränkt, heißt Inneres von J und ist einfach zusammenhängend.

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend wenn es zu jeder stetigen Abbildung $\gamma : S^1 \to X$ eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times S^1 \to X$ gibt mit $H(0,x) = \gamma(x)$ und $H(1,x) = \gamma(0)$ für alle $x \in S^1$. Anschaulich bedeutet dies, dass jede geschlossene Kurve stetig zu einem Punkt deformiert werden kann.

Betrachten wir eine stetige Abbildung $x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit Bild J. Sei $\eta(t)$ eine stetige Abbildung von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Intuitiv handelt es sich um ein stetiges Vektorfeld auf J, das nie verschwindet. Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei $\pi(x) = x/\|x\|$. Dadurch wird eine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ definiert. Sei $\phi(t)$ der Winkel von der positiven x_1-Richtung zu $\eta(t)$. Dann ist $\cos\phi = \eta_1/\|\eta\|$ und $\sin\phi = \eta_2/\|\eta\|$. Durch diese Formeln ist ϕ bis auf eine ganze Zahl mal 2π bestimmt. Wenn verlangt wird, dass ϕ stetig ist und der Wert in einem Punkt, z. B. a festgelegt wird, dann ist ϕ eindeutig bestimmt. Anders gesagt, ist $\pi \circ \eta$ eine Abbildung von $[a,b]$ nach S^1. Die Vorschrift $\phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$ definiert eine stetige Abbildung p von $\mathbb{R}$ nach S^1. Wir suchen also eine Abbildung $\tilde{\eta}$, so dass $p \circ \tilde{\eta} = \pi \circ \eta$. Eine solche Abbildung existiert und ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Sei $j_\eta(J)$ durch $2\pi j_\eta(J) = \phi(b) - \phi(a)$ definiert. Wenn J aus zwei Kurven J_1 und J_2 zusammengesetzt ist, dann ist $j_\eta(J) = j_\eta(J_1) + j_\eta(J_2)$. Wir interessieren und für diese Definition in dem Fall, dass J eine Jordan-Kurve ist. Es werden hier nur solche Jordan-Kurven betrachtet, die stückweise C^1 sind und es wird angenommen, dass sie positiv orientiert sind in dem Sinne, dass $(-dx_2/dt, dx_1/dt)$ immer ins Innere von J weist. Es ist klar, dass $j_\eta(J)$ eine ganze Zahl ist. Sie heißt Index von J.

Satz (Umlaufsatz) Sei J eine positiv orientierte Jordan-Kurve der Klasse C^1

der auf $[0, 1]$ definiert ist und $\eta(t)$ das entsprechende Tangentenvektorfeld. Dann ist $j_\eta(J) = 1$.

Der Index ist invariant unter Deformationen des Vektorfeldes

Hilfssatz 9 Sei J eine Jordan-Kurve und $\xi(t)$ und $\eta(t)$ zwei Vektorfelder auf J die ineinander deformiert werden können ohne zu verschwinden. Dann gilt $j_\xi(J) = j_\eta(J)$.

Zu sagen dass man das Vektorfeld deformieren kann bedeutet, dass es ein stetiges Vektorfeld $\eta(s, t)$ gibt für $a \leq t \leq b$ und $0 \leq s \leq 1$ mit $\eta(t, 0) = \xi(t)$, $\eta(t, 1) = \eta(t)$, $\eta(a, s) = \eta(b, s)$ und $\eta(t, s) \neq 0$.

Beweis Sei $j(s)$ der Index von $\eta(t, s)$ mit s fest. Dann ist $j(s)$ eine stetige Funktion von s. Da aber $j(s)$ auch eine ganze Zahl ist muss sie konstant sein. Insbesondere ist $j(0) = j(1)$.

Als nächstes definieren wir den Index einer stationären Lösung. Sei J eine positiv orientierte Jordankurve auf dem ein Vektorfeld f nie verschwindet. Dann heißt $j_f(J)$ der Index von f bezüglich J, wobei $j_f(J) = j_\eta(J)$ und $\eta(t) = f(x(t))$. Wie im Hilfssatz 9 kann man zeigen, dass wenn J_0 und J_1 zwei Jordankurven sind die ineinander deformiert werden können ohne eine stationäre Lösung zu treffen, dann gilt $j_f(J_0) = j_f(J_1)$. Wir betrachten jetzt ein dynamisches System, das auf einem Gebiet G definiert ist. Sei J eine Jordankurve in G, so dass das Innere von J auch in G liegt und dass das Vektorfeld auf und im Inneren von J nicht verschwindet. Dann ist $j_f(J) = 0$. Da das Innere von J einfach zusammenhängend ist kann J zu einer Kurve J_1 deformiert werden, der ein kleiner Kreis in der Nähe eines Punktes x_0 ist. Da $f(x_0) \neq 0$ ist der Winkel zwischen $f(x)$ und der positiven x_1-Richtung fast konstant. Da $j_f(J)$ eine ganze Zahl ist kann sie nur Null sein. Für einen Punkt x_0 ist der Index gleich für alle Jordankurven J mit der Eigenschaften, dass x_0 im Inneren von J liegt und es keine stationären Punkte im Inneren von J gibt außer eventuell x_0 selbst. Diese Zahl heißt dann der Index von x_0 bezüglich f. Wenn x_0 keine stationäre Lösung ist, dann ist dieser Index Null. Wenn es nur endlich viele stationäre Lösungen im Inneren von J gibt, was wiederum in G liegt dann ist $j_f(J) = j_f(x_1) + \ldots j_f(x_n)$. Wir geben keinen vollständigen Beweis dieser Aussage aber die grundlegende intuitive Idee des Beweises ist leicht zu verstehen. Mann deformiert die Kurve in eine Kurve, die Folgende Eigenschaften hat. Sie Umrundet fast einen stationären Punkt auf einem kleinen Kreis und bewegt sich dann zu einem Kreis um einen anderen stationären Punkt. Auf diese Weise wird jeder stationäre Punkt einmal besucht. Danach werden sie in der umgekehrten Reihenfolge besucht, wobei der Rückweg zwischen zwei Punkten immer nahe beim Hinweg liegt. Schließlich ist die Kurve wieder nahe beim Ausgangspunkt. Die Summanden in der Formel liefern die Kreise. Die Beiträge von dem Hinweg von einem Punkt zum nächsten und dem entsprechenden Rückweg sind fast entgegengesetzt.

Satz 10 Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge G und sei $x(t)$ eine periodische Lösung der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ mit Periode p. Wenn $x(t)$, $0 \leq t \leq p$ eine Jordan-Kurve ist deren Inneres I in G enthalten ist dann enthält I eine stationäre Lösung.
Beweis Wenn die Jordan-Kurve positiv orientiert ist, ist nach dem Umlaufsatz $j_f(J) = 1 \neq 0$. Es kann also nicht sein, dass es keine stationären Lösungen in I gibt.

Jetzt kommen wir zum Theorem von Poincaré und Bendixson.

Satz 11 (Poincaré-Bendixson) Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^2$ und sei $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ für $t \geq 0$, die in einer kompakten Teilmenge von G enthalten ist und die nicht periodisch ist. Wenn es keine stationären Lösungen in der ω-Limesmenge von $x(t)$ gibt, dann ist die ω-Limesmenge das Bild einer periodischen Lösung $y(t)$.

Satz 12 Seien f und $x(t)$ wie in Satz 11 bis auf die Tatsache, dass es eine endliche Anzahl n von stationären Lösungen in der ω-Limesmenge von $x(t)$ gibt. Wenn $n = 0$ lässt sich Satz 11 anwenden. Wenn $n = 1$ und die ω-Limesmenge von $x(t)$ ein Punkt ist, dann konvergiert die Lösung gegen diesen Punkt für $t \to \infty$. Wenn $n \geq 1$ und die ω-Limesmenge von $x(t)$ mehr als einen Punkt enthält, dann besteht diese Menge aus stationären Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ und eine endliche oder unendliche, aber abzählbare Menge von Lösungen $y(t)$ auf $\mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft. Die Lösung $y(t)$ besitzt Grenzwerte für $t \to +\infty$ und $t \to -\infty$ und diese Grenzwerte gehören zu den Punkten x_i.

Der Satz von Poincaré und Bendixson kann manchmal benutzt werden, um die Existenz von periodischen Lösungen zu beweisen. Es gibt ein einfaches Kriterium, das oft benutzt werden kann, um die Existenz von periodischen Lösungen von zweidimensionalen dynamischen Systemen auszuschließen. Sei $\dot{x} = f(x)$ ein zweidimensionales dynamisches System und sei g eine reellwertige Funktion. Wenn $\mathrm{div}(gf) \geq 0$ und $\mathrm{div}(gf)$ nicht identisch verschwindet heißt g Dulac-Funktion. Wenn eine Dulac-Funktion existiert, dann hat das System keine periodische Lösung, deren Inneres im Definitionsbereich von f liegt. In dem Fall ist das Integral der Komponente von gf in der Normalenrichung um die geschlossene Integralkurve nach dem Satz von Stokes gleich dem Integral über dem Inneren der Kurve von $\mathrm{div}(gf)$. Da das erste Integral verschwindet und das zweite Integral strikt positiv ist bekommt man einen Widerspruch.

References

[1] Carr, J. 1981 Applications of centre manifold theory. Springer, Berlin.

[2] De Leenheer, P. und Smith, H. 2003 Virus dynamics: a global analysis. SIAM J. Appl. Math. 63, 1313–1327.

[3] Hale, J. K. 2009 Ordinary Differential Equations. Dover, Mineola.

[4] Hartman, P. 1982 Ordinary Differential Equations. Birkhäuser, Basel.

[5] Korobeinikov, A. 2004 Global properties of basic virus dynamics models. Bull. Math. Biol. 66, 879–883.

[6] Korobeinikov, A. 2004 Lyapunov functions and global properties for SEIR and SEIS epidemic models. Math. Medicine and Biol. 21, 75–83.

[7] Kuznetsov, Y. A. 2010 Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, Berlin.

[8] Nowak, M. A. und May, R. A. 2000 Virus Dynamics. Oxford University Press, Oxford.

[9] Perko, L. 2001 Differential equations and dynamical systems. Springer, Berlin.

[10] Poincaré, H. 1881 Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle (1ère partie) J. de Math. 7, 375–422.

[11] Rudin, W. 1987 Real and complex analysis. McGraw-Hill, New York.

[12] Schnakenberg, J. 1979 Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. J. Theor. Biol. 81, 389–400.

[13] Selkov, E. E. 1968 Self-oscillations in glycolysis. I A simple kinetic model. Eur. J. Biochem. 4, 79–86.

[14] Strogatz, S. H. 1994 Nonlinear dynamics and chaos. Perseus, Cambridge.