

Axiome, Beweise und Unvollständigkeit

S. Fröhlich, F. Koch

12. Mai 2016

1 Griechische Antike

Die Syllogismen des Aristoteles

2 Frühe Neuzeit

Leibniz und die Scientia Generalis

3 Moderne

Die Grenzen der Mathematik

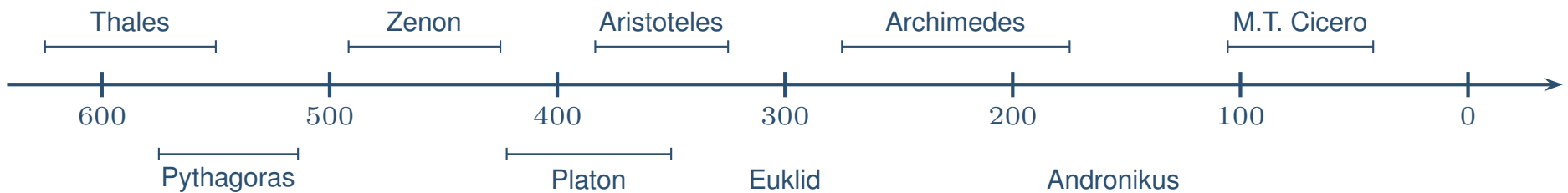
Aristoteles
(384 v.Chr.-322 v.Chr.)



Biographisches



Quelle: Wikipedia



Aufbau

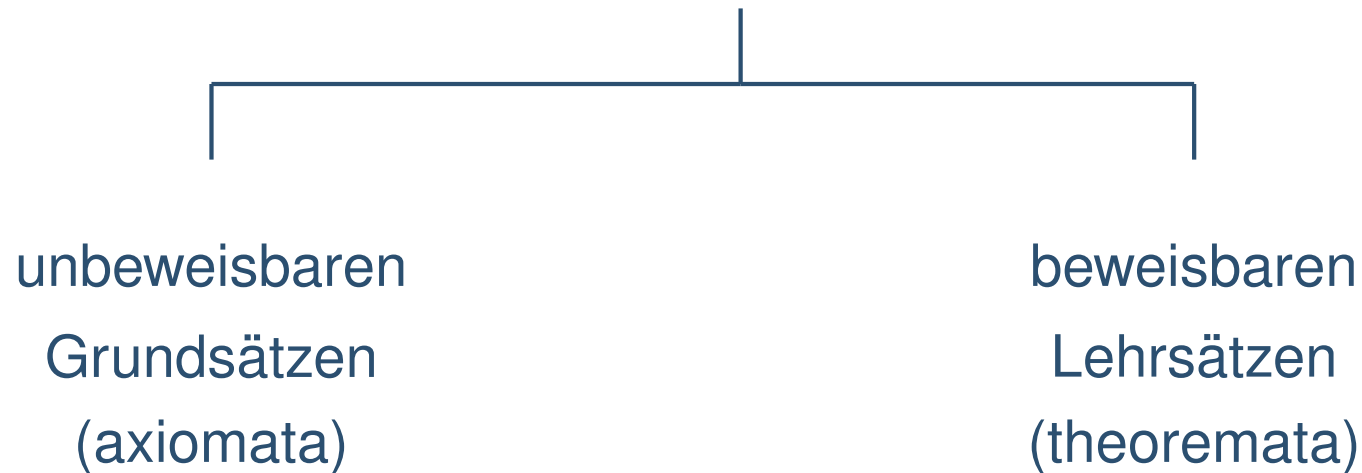
-
- ```
graph TD; A[Aufbau] --- B[1. Kategorien]; A --- C[5. Induktion]; A --- D[2. Hermeneutik]; A --- E[6. Topik]; A --- F[3. Erste Analytik]; A --- G[7. Trugschlüsse]; A --- H[4. Zweite Analytik];
```
- 1. Kategorien
  - 2. Hermeneutik
  - 3. Erste Analytik
  - 4. Zweite Analytik
  - 5. Induktion
  - 6. Topik
  - 7. Trugschlüsse

Andronikus von Rhodos (1. Jh. v. Chr.)

# Was ist eine Wissenschaft?

Gemäß der zweiten Analytik ist eine Wissenschaft ...

... eine Folge von



- Grundbegriffe (archai)
- abgeleitete Begriffe

# Erste Grundsätze

... finden wir in der Metaphysik, z.B. den

## *Satz vom Widerspruch*

... das sicherste unter allen Prinzipien ist dasjenige, bei welchem Täuschung unmöglich ist ... welches aber dies ist, wollen wir nun angeben: dass nämlich dasselbe demselben in derselben Beziehung ... unmöglich zugleich zukommen und nicht zukommen kann.

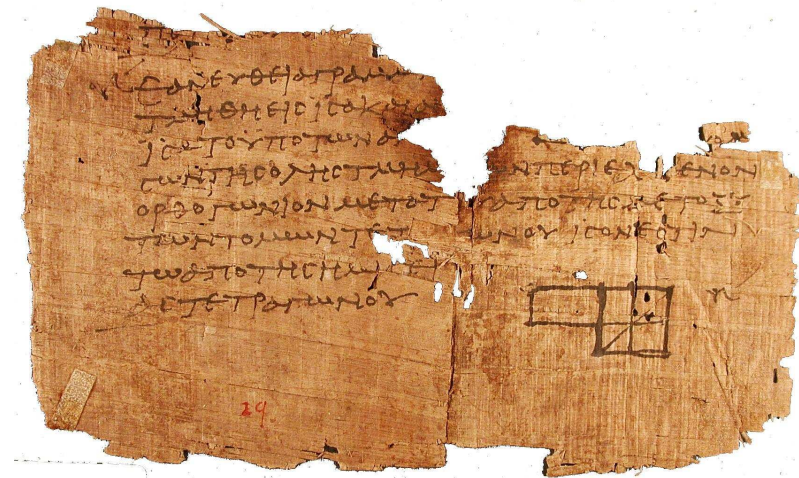
## *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*

Ebensowenig aber kann es zwischen den beiden Gliedern des Widerspruchs etwas geben, sondern man muss notwendig

# Beispiel: Die Geometrie Euklids

Das erste Buch der *Elemente* Euklids besteht aus

- 23 Definitionen  
z.B.: Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat
- 5 Postulaten
- 9 Axiomen
- 48 Propositionen



Lernte und lehrte Aristoteles nach voreuklidischen *Elementen*?



# Syllogismen – Ein Beispiel

$U_1$ : Alle **Mathematiker** sind **verrückt**.

$U_2$ : Einige **Menschen** sind **Mathematiker**.

---

$U_3$ : Folglich sind einige **Menschen verrückt**.

|              |       |                            |
|--------------|-------|----------------------------|
| Mathematiker | ..... | Mittelbegriff $M$          |
| verrückt     | ..... | Prädikat $P$ (Oberbegriff) |
| Menschen     | ..... | Subjekt $S$ (Unterbegriff) |

# Die syllogistischen Formen

## 1. Figur

$$\begin{array}{c} M \circ_1 P \\ S \circ_2 M \\ \hline S \circ_3 P \end{array}$$

## 2. Figur

$$\begin{array}{c} P \circ_1 M \\ S \circ_2 M \\ \hline S \circ_3 P \end{array}$$

## 3. Figur

$$\begin{array}{c} M \circ_1 P \\ M \circ_2 S \\ \hline S \circ_3 P \end{array}$$

## 4. Figur

$$\begin{array}{c} P \circ_1 M \\ M \circ_2 S \\ \hline S \circ_3 P \end{array}$$

$\circ_k$  ... bedeutet ...

- |                          |     |                           |     |
|--------------------------|-----|---------------------------|-----|
| (i) allgemein bejahend   | $a$ | (ii) allgemein verneinend | $e$ |
| (iii) besonders bejahend | $i$ | (iv) besonders verneinend | $o$ |

(aus: affirmo, nego)

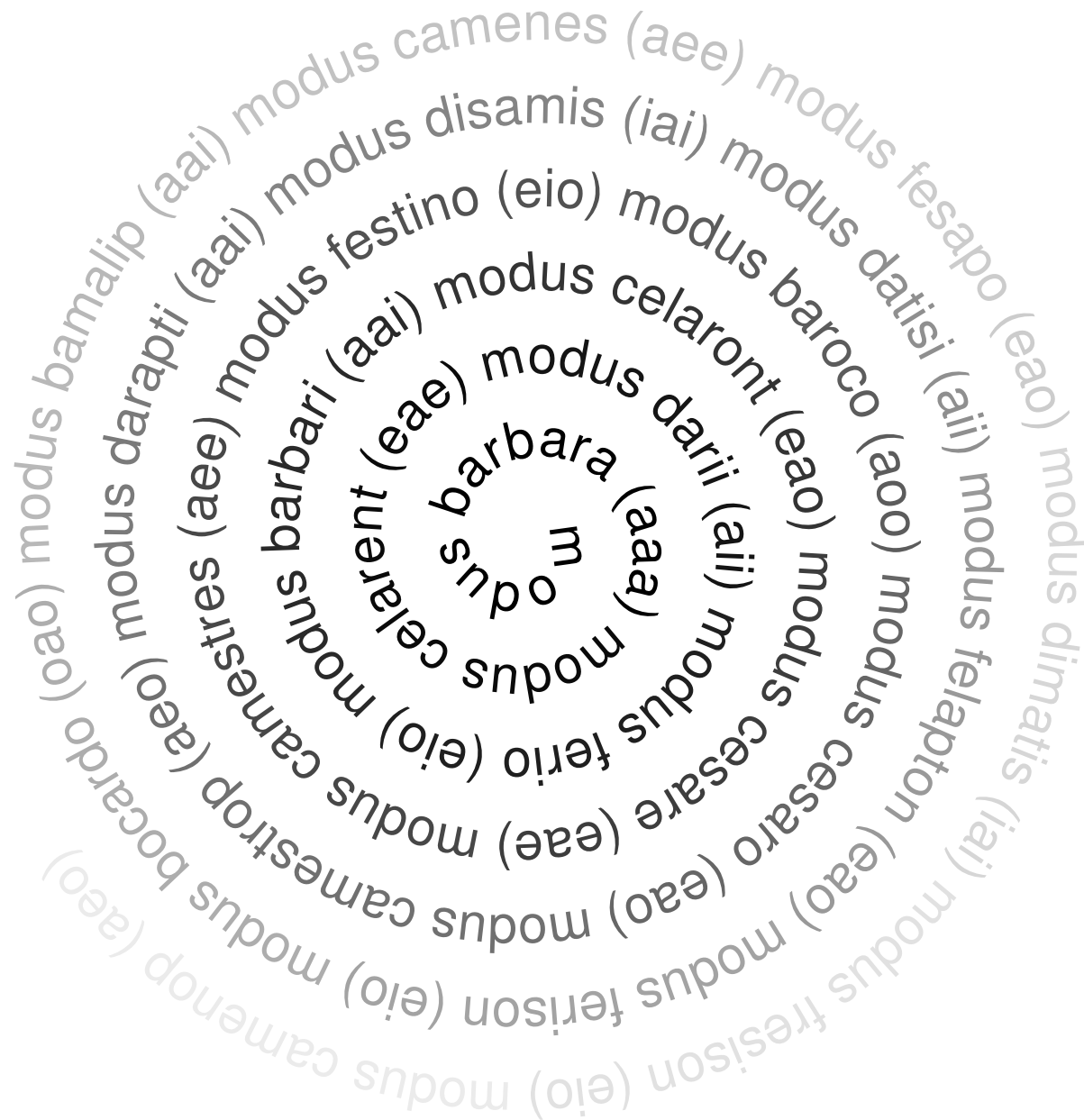
## Modus Darii (aai)

Alle Mathematiker sind verrückt.  
Einige Menschen sind Mathematiker.  
Folglich sind einige Menschen verrückt.

## Modus Ferio (eio)

Kein Fisch ist ein Vierbeiner.  
Einige Säugetiere sind Fische.  
Folglich sind einige Säugetiere nicht Vierbeiner.

# Syllogistische Modi



# Weitere Beispiele

## Modus Darii (aii)

Es soll nämlich  $A$  jedem  $B$  ...  
und  $B$  einem  $C$  zukommen ...  
Mithin muss ...  $A$  einem  $C$  zukommen.

## Modus Ferio (eio)

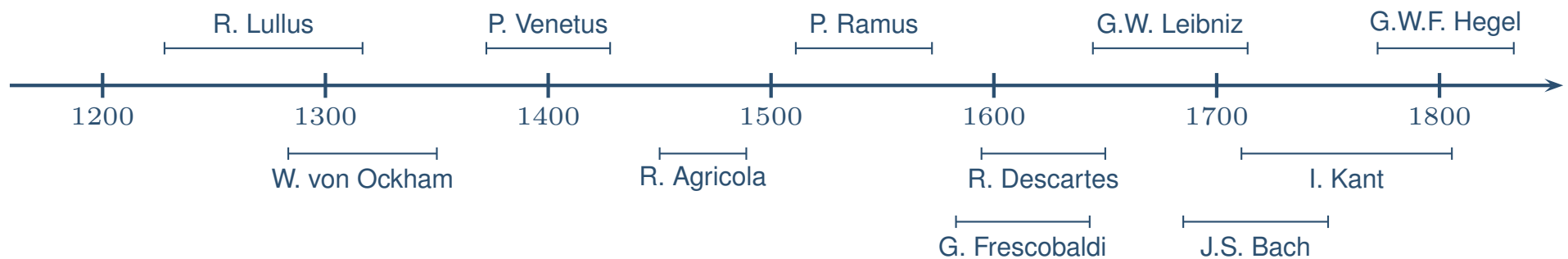
Und wenn  $A$  keinem  $B$  ...  
und  $B$  einem  $C$  zukommt ...  
kommt  $A$  einem  $C$  notwendig nicht zu.



G.W. Leibniz (1646-1716)



# Biographisches



# Logik mit Diagrammen I

## L. Euler: *Briefe an eine deutsche Prinzessin* (1761)



weil man sagt, daß kein A, B ist, oder daß nichts von dem, was der Begriff A enthält, zu dem Begriffe B gehöre.

III. In besonders bejahenden Sätzen: Einige A sind B, fällt ein Teil des Kreises A in den Kreis B:



so daß man sieht, daß etwas, was in dem Begriffe A enthalten ist, auch in dem Begriffe B enthalten sey.

IV. Endlich was die besonders verneinenden Sätze betrifft, Einige A sind nicht B, so muß ein Theil des Kreises A außer dem Kreis B fallen, wie hier:

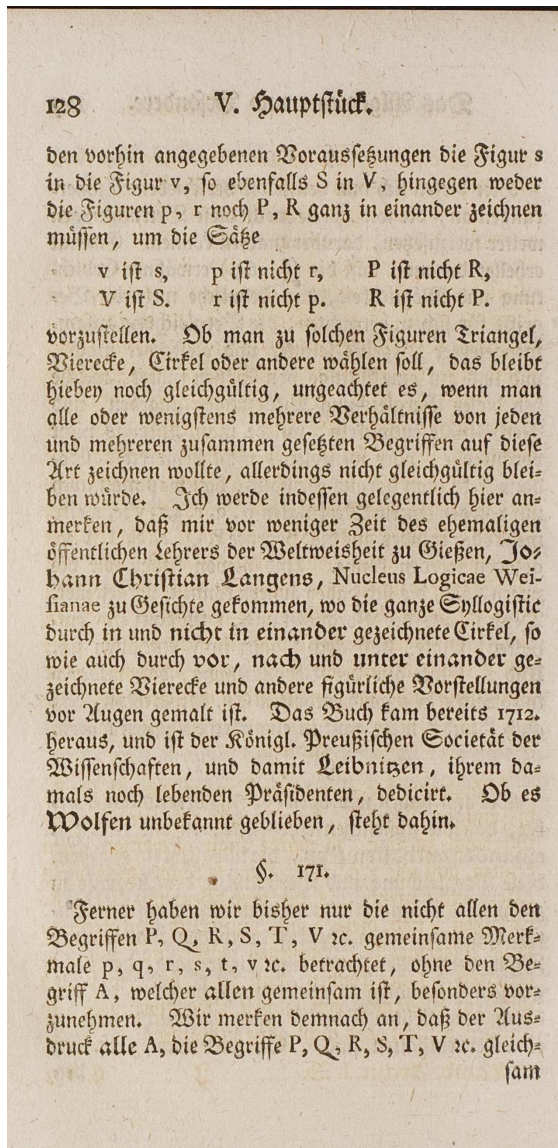


wo die Figur zwar mit der vorigen einerley ist, wo man aber vornämlich dieses anmerkt, daß etwas in dem Begriffe A ist, was der Begriff B nicht enthält, oder was sich außer diesem Begriffe befindet.

den 14 Februar 1761.







J.H. Lambert

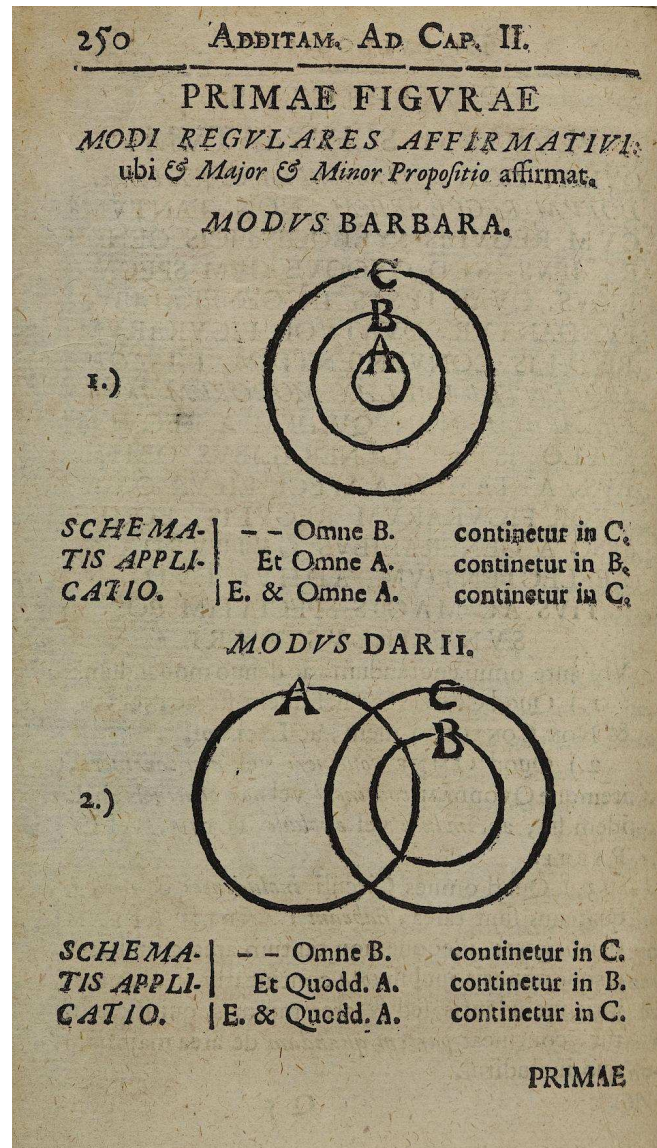
*Anlage zur Architektonik (1771)*



# Logik mit Diagrammen III

J.C. Lange

*Nucleus Logicae Weisianae (1712)*



# Logik mit Diagrammen IV

distribute oder universale und nicht-distribute oder partikulare ein. Den Umfang des Subjekts erhält man aus dem Quantitätszeichen des Satzes: er ist universal im universalen, partikular im partikularen Satze. Jedoch ist das Prädikat partikular im bejahenden, universal im verneinenden Satze. Daher hat der an Qualität geringere Satz ein Prädikat von stärkerer Quantität.

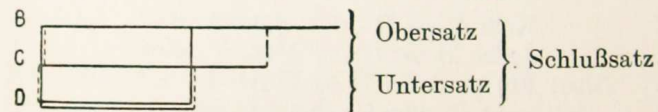
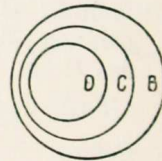
β) Die Schlußweisen der vier Figuren ebenso dargestellt

## Erste Figur

Barbara:

|   |                      |   |
|---|----------------------|---|
| A | Jedes C ist B        | B |
| A | Jedes D ist C        | C |
| A | Also: Jedes D ist B, | D |

nämlich jedes D,  
das C ist.



Die punktierten Linien verbinden die nächsten Linien und bezeichnen Aussagen, die aus dem Mittelbegriff und einem der Außenbegriffe gebildet sind. Die durchgezogene [doppelte] Linie jedoch bezeichnet den Schlußsatz. Nimmt beim Unterbegriff D der doppelte Strich den

G.W. Leibniz

Versuch

der beweisenden Syllogistik (1690)



# *Der Gebrauch von Zeichen*

Jede menschliche Vernunftüberlegung kommt durch irgendwelche Zeichen oder Charaktere zustande ...

Wenn nämlich ein Geometer, so oft wie er eine Hyperbel, eine Spirale oder eine Quadratrix bei einem Beweis anführt, gezwungen wäre, sich immer deren Definitionen bzw. Erzeugungen und weiterhin die Definitionen der Begriffe, die in jene eingehen, genau vorzustellen, würde er erst sehr spät zu dem zu entdeckenden Neuen gelangen ...

(aus: *Die Grundlagen des Vernunftkalküls*, vor 1690)



# ***Eckpfeiler des Leibnizprogramms***

- a** Allgemeine Wissenschaft (*scientia generalis*)
- b** Allgemeine Charakteristik (*characteristica universalis*)
- c** Logisches Kalkül (*calculus logicus*)

# Leibniz' Kalkül der Konzepte I

- „Jedes A ist B“ wird zu „A ist B“
  - „A est B“ (Interpretation:  $A \in B$ )
- konzeptuelle Konjunktion AB
  - „AB“ oder „A+B“
  - $(A \in B) \wedge (A \in C) \longleftrightarrow (A \in BC)$
- verwirft traditionelle Regelungen
  - Zahl der Prämissen bzw. Konzepte in Prämissen usw.

# Leibniz' Kalkül der Konzepte II

Aus: *Probestücke des Vernunftkalküls*  
(nach 1686)

(10\*) *A ist B*, folglich: *AC ist B*. Beweis: (1) *A ist B* gemäß der Hyp. Folglich (2):  $A \infty AB$  (aufgrund von N. 8). Folglich (3):  $AC \infty ABC$  (aufgrund von 2<sup>48</sup>), folglich (gemäß 3 aufgrund von N. 8): *AC ist B*. Was zu beweisen war.

(11)  $A \infty B$ , folglich:  $AC \infty BC$ . [Dies] folgt aus N. 2.<sup>49</sup>

(12) Wenn  $A \infty BC$ , dann folgt  $AC \infty BC$ . Beweis: Denn [es gilt] (1) (gemäß der Hyp.):  $A \infty BC$ . Folglich (2):  $AC \infty BCC$  (aufgrund von 11), das heißt (3):  $AC \infty BC$  (aufgrund von 7). Was zu beweisen war.

(13) Es folgt nicht:  $AC \infty BC$ . Folglich:  $A \infty B$ . Das wird bewiesen werden, indem ein Fall vorgelegt wird, in dem jenes wahr, dennoch [aber] dieses nicht wahr ist; diesen Fall vorzulegen, heißt ein Problem lösen. Es sei  $AC \infty BC$  und *A nicht*  $\infty B$ . Wenn nämlich  $A \infty BC$  und nicht  $A \infty B$ , dann wird doch (aufgrund von 12)  $AC \infty BC$  [gelten].<sup>50</sup> Was herzustellen war.

(14) *A ist BC*, folglich: *AC ist B*. Beweis: (1) *A ist BC* (aufgrund der Hyp.). Folglich (2):  $A \infty ABC$  (aufgrund von N. 8). Folglich (3):  $AC \infty ABC$  (aufgrund von N. 11). Folglich (4): (aufgrund von N. 8) *AC ist B* <sup>51</sup> (aber es ist auch wahr, daß *A B ist*).

(15) *AB ist A*.<sup>52</sup> Beweis: (1)  $AB \infty AB$ . Folglich (2):  $AB \infty AAB$  (aufgrund von N. 7). Folglich (3): *AB ist A* (aufgrund von N. 8).

(16) *A ist B* und *B ist C*, folglich: *A ist C*. Beweis: (1) *A ist B* (gemäß der Hyp.). Folglich (2):  $A \infty AB$  (aufgrund von N. 8). Auf ähnliche Weise (3): *B ist C* (gemäß der Hyp.). Folglich (4):  $B \infty BC$  (aufgrund von N. 8). Daher (aufgrund von 2 und 4) (5):  $AB \infty (ABBC$  bzw. aufgrund von N. 7  $\infty) ABC$ . Gemäß 5 aufgrund von N. 8 (6): *AB ist C*. Und schließlich gemäß 6 aufgrund von 2 (7): *A ist C*. Was zu beweisen war.

# Englische Logik im 19. Jahrhundert

Some one wrote to my husband to say that, in reading an old treatise by Leibniz (who lived at the same time as Newton) he had come upon the same formula which the Cambridge people call "Boole's Equation." My husband looked up Leibniz and found his equation there, and was perfectly delighted; he felt as if Leibniz had come and shaken hands with him across the centuries.

(Mary E. Boole in *Letters to a reformer's children*, 1905)

# *Kant über die Logik*

Merkwürdig ist noch an ihr [der Logik], daß sie auch bis jetzt [seit Aristoteles] keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.

(aus dem Vorwort zur *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Auflage, 1787)



# ***Bucher über die klassische Logik***

Ein Gegenstand kann über, unter, neben einem andern liegen; ein Mensch kann in freundschaftlichen, verwandtschaftlichen, beruflichen Beziehungen zu einem andern stehen ...

Keine Wissenschaft kommt ohne solche Beziehungen aus ... Das wurde bis vor hundert Jahren übersehen, was den Entdecker der Relationslogik zum überraschenden Urteil über die Vergangenheit veranlaßte: Die traditionelle Logik ..., so stellt de Morgan verblüffend fest, reicht nicht aus, den elementaren, einsichtigen Sachverhalt zu beweisen: „Wenn alle Pferde Tiere sind, dann sind auch alle Pferdeköpfe Tierköpfe“.

# *Ackermann/Hilbert über die klassische Logik*

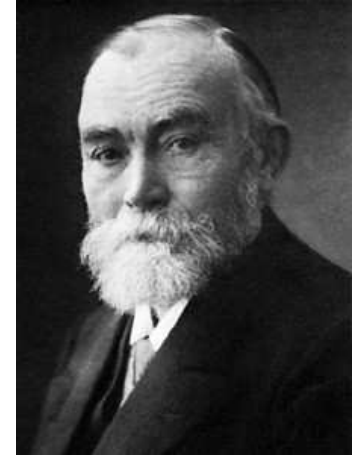
Der Irrtum, dass die traditionelle Logik ausreiche, um die Mathematik aus ihren Grundlagen heraus logisch aufzubauen, konnte nur dadurch zustande kommen, dass vor Frege und Peano niemand eine restlose Analyse der in der Mathematik verwendeten logischen Schlussweisen vorgenommen hat.

In den älteren Logikbüchern findet man zwar genügend Beispiele für die Anwendung der traditionellen Schlussfiguren in der Mathematik, auch für eine Häufung von solchen komplizierterer Art, aber es wird nie der Beweis irgendeines wichtigen mathematischen Satzes in alle Einzelheiten zerlegt.



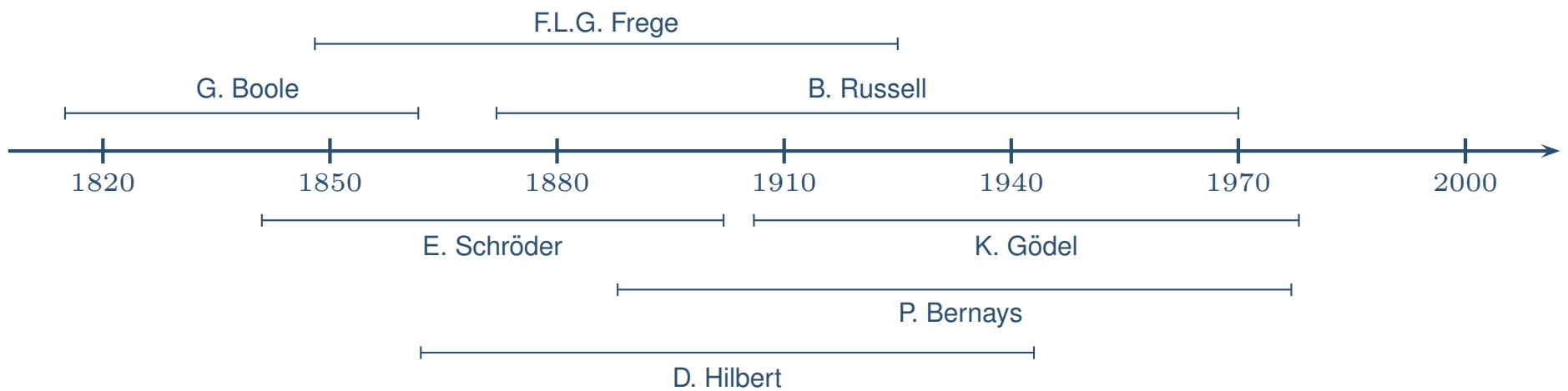
David Hilbert (1862-1943)

Gottlob Frege (1848-1925)



Kurt Gödel (1906-1978)

# Biographisches



# Frege's Begriffsschrift

Ich verspreche mir überall da eine erfolgreiche Anwendung meiner Begriffsschrift, wo ein besonderer Werth auf die Bündigkeit der Beweisführung gelegt werden muss, wie bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung.

(aus dem Vorwort)



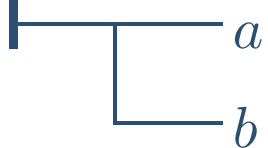


Auch Leibniz hat die Vorteile einer angemessenen Bezeichnungsweise erkannt, vielleicht überschätzt. Sein Gedanke einer allgemeinen Charakteristik, eines *calculus philosophicus* oder *rationator* war zu riesenhaft, als dass der Versuch, ihn zu verwirklichen, über die bloßen Vorbereitungen hätte hinausgelangen können. Die Begeisterung, welche seinen Urheber bei der Erwägung ergriff, welch' unermessliche Vermehrung der geistigen Kraft der Menschheit aus einer die Sachen selbst treffenden Bezeichnungsweise entspringen würde, ließ ihn die Schwierigkeiten zu gering schätzen, die einem solchen Unternehmen entgegenstehen. Wenn aber auch dies hohe Ziel in einem Anlaufe nicht erreicht werden kann, so braucht man doch an einer langsamen, schrittweisen Annäherung nicht zu verzweifeln.

# Frege diagramme

Urteil:  $\vdash a$

Eine Unterscheidung von Subjekt und Prädikat findet nicht statt.

Bedingtheit: 

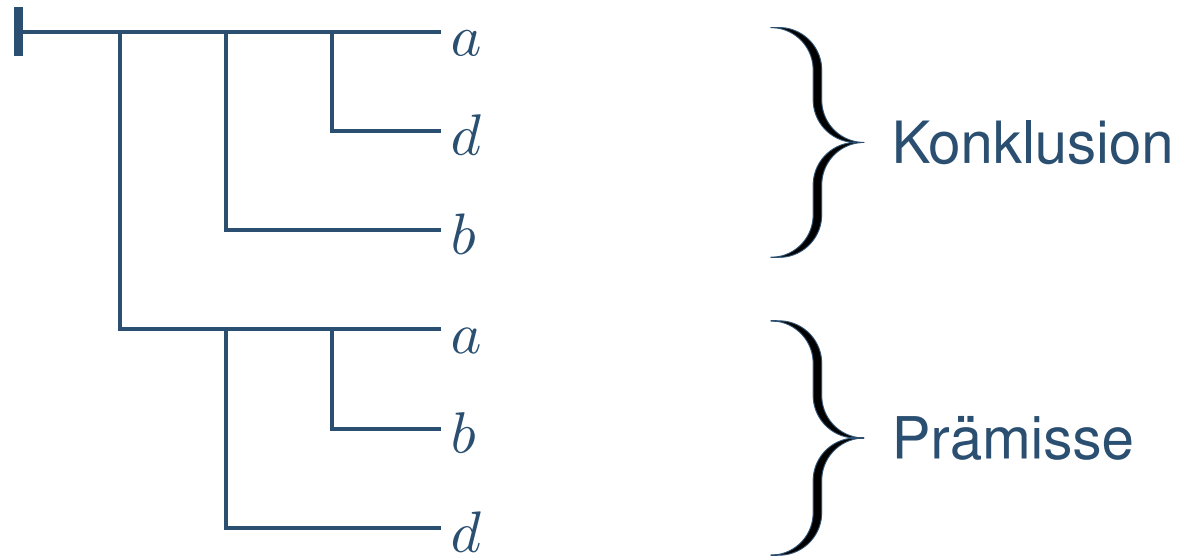
$a$  wird bejaht und  $b$  wird bejaht

$a$  wird bejaht und  $b$  wird verneint

$a$  wird verneint und  $b$  wird verneint

Moderne Schreibweise:  $b \rightarrow a$  oder  $\neg b \vee a$

# Beispiel einer Tautologie



$$[d \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [b \rightarrow (d \rightarrow a)]$$

# Frege's Axiomensystem

1.  $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
2.  $[a \rightarrow (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)]$
3.  $[d \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [b \rightarrow (d \rightarrow a)]$
4.  $(\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow (a \rightarrow b)$
5.  $\neg\neg a \rightarrow a$
6.  $\neg a \rightarrow \neg\neg a$
7.  $(c = d) \rightarrow [f(c) = f(d)]$
8.  $c = c$
9.  $\forall x f(x) \rightarrow f(c)$

Modus Ponens, Verallgemeinerungsregel, Substitutionsregel

# Weitere Axiomensysteme

- B. Russell, A.N. Whitehead (1910)
- J.G. Nicod (1917)
- J. Łukasiewicz, A. Tarski (1930)
- P. Bernays, D. Hilbert (1934)
- J.B. Rosser (1953)
- S.C. Kleene (1967)
- J.R. Shoenfield (1967)
- E. Mendelson (1979)

R.E. Hodel: *An introduction to mathematical logic* (1995)

D.W. Hoffmann: *Grenzen der Mathematik* (2013)

# Eigenschaften von Axiomensystemen

Ein formales System heißt

- *widerspruchsfrei*  $\vdash a$  impliziert  $\not\vdash \neg a$
- *negationsvollständig*  $\not\vdash \neg a$  impliziert  $\vdash a$
- *korrekt*  $\vdash a$  impliziert  $\models a$
- *vollständig*  $\models a$  impliziert  $\vdash a$



# Peanos Axiome der Arithmetik

Signo  $N$  significatur *numerus (integer positivus)*.

- »  $1$  » *unitas.*
- »  $a + 1$  » *sequens  $a$ , sive  $a$  plus 1.*
- »  $=$  » *est aequalis. Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.*

## Axiomata.

1.  $1 \in N.$
2.  $a \in N . \supset . a = a.$
3.  $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a.$
4.  $a, b \in N . \supset : a = b . b = c : \supset . a = c.$
5.  $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6.  $a \in N . \supset . a + 1 \in N.$
7.  $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8.  $x \in N . \supset . a + 1 - = 1.$
9.  $k \in K : . 1 \in k : . x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k : : \supset . N \supset k.$

# ***Die Gödelschen Sätze***

## **Vollständigkeitssatz**

Eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist allgemeingültig genau, dann, wenn sie innerhalb des Kalküls beweisbar ist.

## **Erster Unvollständigkeitssatz**

Jedes korrekte formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist unvollständig.

## **Zweiter Unvollständigkeitssatz**

Innerhalb eines widerspruchsfreien formalen Systems, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, kann die eigene Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden.

# Quellennachweise

Folie 3: Griechische Antike

Die Schule von Athen (Raffael, wikimedia pd)

Folie 4: Biographisches

Makedonisches Reich (wikimedia gfdl)

Folie 8: Die Geometrie Euklids

Papyrusfragment (wikimedia pd)

Folie 14: Frühe Neuzeit

G.W. Leibniz (wikimedia pd)

Folie 15: Biographisches

Belagerung von Leipzig 1632 (wikimedia pd)

Folie 16: Logik mit Diagrammen I

Kopie aus L. Euler: Briefe an eine deutsche Prinzessin, 2. Teil, S. 91 (1761)

L. Euler (wikimedia pd)

Folie 17: Logik mit Diagrammen II

Kopie aus J.H. Lambert: Anlage zur Architektonik, S. 128 (1771)

J.H. Lambert (wikimedia pd)

Folie 18: Logik mit Diagrammen III

Kopie aus J.C. Lange: Nucleus Logicae Weisianae, S. 250 (1712)

Folie 19: Logik mit Diagrammen IV

Kopie aus: Versuch der beweisenden Syllogistik, S. 4 (1690)

Folie 20: Der Gebrauch von Zeichen  
aus G.W. Leibniz: Die Grundlagen des Vernunftkalküls (1690)

Folie 23: Leibniz' Kalkül der Konzepte II  
Kopie aus G.W. Leibniz: Probestücke des Vernunftkalküls (1686)

Folie 24: Englische Logik im 19. Jahrhundert  
aus V. Peckhaus: Leibniz und die britischen Logiker des 19. Jahrhunderts

Folie 25: Kant über Logik  
aus I. Kant: Kritik der reinen Vernunft, 2. Auflage (1787)

Folie 26: Bucher über die klassische Logik  
aus T.G. Bucher: Einführung in die angewandte Logik, S. 248 (1998)

# Quellennachweise

Folie 27: Ackermann/Hilbert über die klassische Logik  
aus W. Ackermann, D. Hilbert: Grundzüge der theoretischen Logik, S. 65 f. (1959)

Folie 28: Moderne

G. Frege (mathematik.de, Logik, DMV)

D. Hilbert (wikimedia pd)

K. Gödel (mathematik.de, Logik, DMV)

Folie 29: Biographisches

Jubelnde Revolutionäre nach Barrikadenkämpfen am 18. März 1848 (wikimedia pd)

Folie 30: Freges Begriffsschrift

Kopie der Titelseite Begriffsschrift (1879)

aus G. Frege: Begriffsschrift, Vorwort, S. XII (1879)



Folie 31: Frege über Leibniz

aus G. Frege: Begriffsschrift, Vorwort, S. XI f. (1879)

Folie 36: Eigenschaften von Axiomensystemen

aus D.W. Hoffmann: Grenzen der Mathematik, S. 76 (2013)

Folie 37: Peanos Axiome der Arithmetik

Kopie aus G. Peano: Arithmetices Principia, S. 1 (1889)

Folie 38: Die Gödelschen Sätze

aus D.W. Hoffmann: Grenzen der Mathematik (2013)